

國立成功大學 90 學年度微積分競試試題

91 年 4 月 20 日上午 9:10~10:50

一、(甲) 多重選擇題 (共 5 小題, 每小題 4 分, 每小題可能有一個或一個以上的答案, 全對才給分). (20 分)

(1) 令函數 $f:(c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ 且 $a \in (c, d)$. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$, 則下列何者恆成立?

- (a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$. (b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$. (c) $f(a) = 2$.
(d) $f(a) > 1$. (e) 滿足 $f(x) > 1$ 的數 x 有無限多個.

(2) 設 f, g 為二函數且對所有的 $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$. 已知 $f(0) = 1$, $g(0) = 3$, 且 $g(1) = 4$, 則 $f(1)$ 之值為 (a) -2 . (b) -1 . (c) 0 . (d) 1 . (e) 2 .

(3) 設 $a < b$ 且函數 $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續, 則下列何者恆成立?

- (a) f 在 $[a, b]$ 可積分. (b) f 在 $[a, b]$ 有界. (c) f 在 (a, b) 可微分.
(d) f 在 $[a, b]$ 有極大值和極小值. (e) f 為 $1 - 1$.

(4) 設 $a < b$ 且函數 f 在 $[a, b]$ 為黎曼可積 (Riemann integrable), 則下列何者恆成立?

- (a) f 在 $[a, b]$ 連續. (b) f 在 $[a, b]$ 有界. (c) f 在 $[a, b]$ 有極大值.
(d) 若 $c \in (a, b)$, 則極限 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 存在. (e) 若 $c \in (a, b)$, 則 $f'(c)$ 存在.

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$, 則下列何者恆成立?

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$.
(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} = L$. (d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = L$.
(e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 2L$.

一、(乙) 填充題 (共 5 小題, 每小題 4 分). (20 分)

(1) 令 $f(x) = \frac{x \cos(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 則 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 令 $f(x) = x^5 + 2x^3 - 6x - 1$ 的反函數為 g , 則 $g'(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 若 $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{1+t^4} dt$, 則 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \cdot \frac{\pi}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 方程式 $x^2 + xe^y + \ln(y+1) = 2$ 之圖形在點 $(1,0)$ 之切線方程式為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、試求下列各積分 (共 2 小題, 每小題 5 分). (10 分)

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}} dx$. (2) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x) + \ln(2-x)} dx$.

三、試求下列各值

(1) 方程 $y^2 = x(x-a)^2$, ($a > 0$), 所圍成之一環的面積. (4 分)

(2) 拋物線 $y = x^2$ 與直線 $y = x$ 所圍成的區域繞 $y = 3$ 旋轉所得旋轉體的體積. (4 分)

(3) 另以積分表示上述旋轉體之表面面積 (不必計算). (2 分)

四、試討論函數 $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} - 2(x-1)^{\frac{4}{3}}$ 的增、減情形, 彎曲方向, 極值及反曲點, 並列表以繪出其圖形. (20 分)

五、(1) 設函數 $f(x) = \begin{cases} (x^2 e^x)^{\frac{x}{1+x}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 1, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

試問: (a) $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否連續? (5 分)

(b) $f(x)$ 在 $x = 0$ 是否可微? (5 分)

(2) 設已知 $\int f(x) dx = F(x) + C$, 試求: $\int f^{-1}(x) dx = ?$ (5 分)

(3) 試求: $\int \operatorname{sech}^{-1}(x) dx = ?$ (5 分)