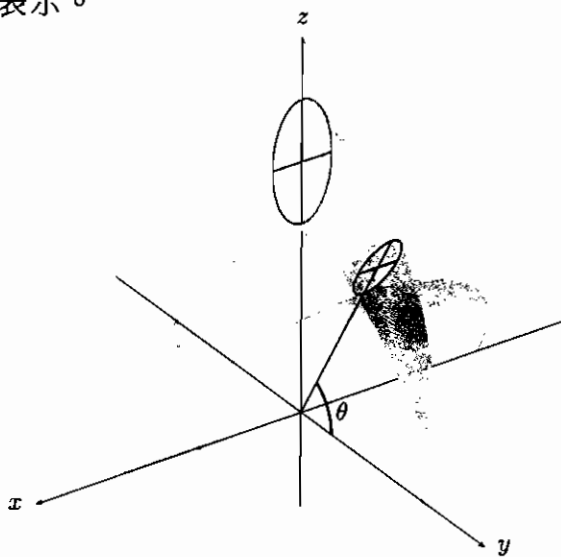


- 注意：1. 請在答案卷左上角寫上考生身份資料。
 2. 本試題卷共十大題。
 3. 作答時請標明題號，並依序作答於試卷之五小頁；另，第六、七頁為草稿區，計算草稿用。
 4. 禁止使用計算器。

1. 假設級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，且各項 a_n 均為正。請問級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ 收斂或發散？若為其中之一，請證明。若為二者皆可能，請舉例。(10%)

2. 假定 f 在區間 $[a, b]$ 上為嚴格單調可微函數，且 $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$ ，試求積分 $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy$ ，用函數 f 和 F 來表示。(10%)

3. 一螺殼如右圖附著在一半徑為 r 的圓周上，由 $(0, r, 0)$ 延伸至 $(0, 0, r)$ 。此殼與過 x 軸的平面相交的截面是兩軸漸增的橢圓，其兩軸長與圓心角 θ 成正比。當 $\theta = 0$ 時，兩軸皆為 0；而 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，兩軸長為 $2a$ 與 $2b$ (軸長為徑長的兩倍)。求螺殼所圍區域的體積。(10%)



4. 試證橢圓面 $\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1$ 的內部體積為 $V = \frac{4}{3}\pi ABC$ 。(10%)

5. 假設函數 f 在開區間 I 上有 3 階連續導數，且 I 包含原點，試證：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{1}{2!} \int_0^x f'''(t)(x-t)^2 dt \quad (10\%)$$

— 背面有題目 —

6. 求下列函數的導數：

(a) $y = \frac{3 \cosh(x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}}$; (3%)

(b) $y = \sinh^{-1} e^x$; (3%)

(c) $y = \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^3)e^{-t^3} dt$ 。 (4%)

7. 試求下列不定積分：

(a) $\int x^2 \tan^{-1} x^3 dx$; (3%)

(b) $\int \frac{u}{u^6 - 8} du$; (3%)

(c) $\int \sin^6 x dx$ 。 (4%)

8. 給定參數方程式 $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$

(a) 試決定參數 t 的最大區間, 使得 y 為 x 的函數 $f(x)$, 並找出定義域。 (5%)

(b) 找出函數 $y = f(x)$ 的極值點、遞增和遞減區間、凹凸區間、
反曲點和漸近線, 並畫出 $y = f(x)$ 的圖形。 (5%)

9. 假設 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{3n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{nn}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的值。 (10%)

10. 設 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{當 } x \neq 0 \\ 0 & \text{當 } x = 0 \end{cases}$, 請判定 $f'(x)$ 存在的位置, 並求 $f'(x)$;

$f'(x)$ 是否為連續函數, 請說明理由。 (10%)