

**Abstract:** 課堂上討論的克卜勒第一定律推導  $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$  情況和先前  $F=ma$  的質量描述

## 關於行星軌道是橢圓而不是圓形

克卜勒當初在推導的時候沒有用到萬有引力，而是從觀測火星數據引入的概念，因為實際上克卜勒 (1571~1630)和牛頓(1643~1727)，參考圖一，橢圓軌道是圓形和卵型之間的假設結果 [1]，最後提出了偏心說

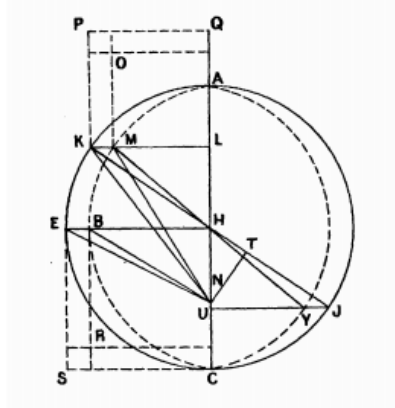


圖 8：克卜勒之橢圓軌道與面積定律（引自 *Koyre'*, 1992, p275）

1. 連接  $KN$ ，自  $N$  引直線垂直  $KH$  於  $T$ ；
2. 在以  $N$  為圓心， $KT$  長（稱為徑向距離 *diametral distance*）為半徑劃弧，交  $KL$ （此處  $KL \perp AC$ ）於  $M$ （*Aiton*, 1969, p84）。

由此方法所得到的曲線，剛好是落在圓形與卵形曲線之中間，並且與所觀測到的火星位置（含距離與角度）完全吻合。第 58 章裡克卜勒作了如下的結論：

“43 章中所提之圓，錯誤在於值太大；45 章中所提之卵形，錯誤在於值之不足，其中超出與不夠之量剛好相同。而僅有橢圓可被置放在圓形與卵形之間，所以行星的路徑僅能是一橢圓。”

而這個想法，曾在 1605 年 10 月 11 日，克卜勒給友人的信上，首次被提及：

“因此，親愛的 *Fabricius*，我有了答案，行星的路徑是個完整的橢圓。”

（*Kozhamthadam*, 1995, p235; *Wilson*, 1968, p21）

<圖一>

所以在成大物理系的 *astrolab* 網站上[2]，作者提出一個說法，參考圖二，如果當初克卜勒不是觀察內行星中的火星（那個時代只知道太陽系有六顆行星，而火星恰好是離心率最大的），結論是否會有不同

太陽系九大行星運行軌道的主要數據如下：

行星	半長軸 $a$ (A.U.)	週期 $p$ (地球年)	軌道離心率 $e$	$p^2/a^3$
水星	0.387	0.241	0.206	1.002
金星	0.723	0.615	0.007	1.002
地球	1.000	1.000	0.017	1.000
火星	1.524	1.881	0.093	1.000
土星	5.203	11.86	0.048	0.999
木星	9.539	29.46	0.056	1.000
天王星	19.19	84.01	0.046	0.999
海王星	30.06	164.8	0.010	1.000
冥王星	39.53	248.6	0.248	1.001

除了水星與冥王星之外，其餘行星的軌道都很接近圓形。在內行星中，火星的離心率是最大的，如果當初克卜勒繼承 *Brahe* 的觀測數據後，如果不是先計算火星的運動軌道，結局是否和現在會有不同呢？

<圖二>

而後根據牛頓的萬有引力計算[3]，證實了軌道會是圓錐截面，而在另一個維基條目 [Kepler's laws of planetary motion](#) 中也說明有觀測到 [parabolic](#) 跟 [hyperbolic](#) 形式的彗星 [4]，所以我認為課堂上圓形的狀況其實是不需要排除的。

In the case of [gravity](#), [Newton's law of universal gravitation](#) states that the force is proportional to th

$$f(1/u) = a_r = \frac{-GM}{r^2} = -GMu^2$$

where  $G$  is the [constant of universal gravitation](#),  $m$  is the mass of the orbiting body (planet) - note t Sun). Substituting into the prior equation, we have

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2}.$$

So for the gravitational force — or, more generally, for *any* inverse square force law — the right har to a shift of origin of the dependent variable). The solution is:

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

where  $A$  and  $\theta_0$  are arbitrary constants.

The equation of the orbit described by the particle is thus:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{h^2/GM}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)},$$

where  $e$  is:

$$e \equiv \frac{h^2 A}{GM}.$$

In general, this can be recognized as the equation of a [conic section in polar coordinates](#)  $(r, \theta)$ . W

## First Law

See also: [ellipse and orbital eccentricity](#)

"The orbit of every planet is an ellipse with the Sun at one of the two foci."

An ellipse is a particular class of mathematical shapes that resemble a stretched out circle (see the figure to the right). Note as well that the Sun is not at the center of the ellipse but is at one of the focal points. The other focal point is marked with a lighter dot but is a point that has no physical significance for the orbit. Ellipses have two focal points and the center of the ellipse is the midpoint of the line segment joining them. Circles are a special case of an ellipse that are not stretched out and in which both focal points coincide at the center.

How stretched out that ellipse is from a perfect circle is known as its [eccentricity](#); a parameter that can take any value greater than or equal to 0 (a simple circle) and smaller than 1 (when the eccentricity tends to 1, the ellipse tends to a [parabola](#)). The eccentricities of the planets known to Kepler varies from 0.007 (Venus) to 0.2 (Mercury). (See [List of planetary objects in the Solar System](#) for more detail.)

After Kepler, though, bodies with highly eccentric orbits have been identified, among them many [comets](#) and [asteroids](#). The [dwarf planet Pluto](#) was discovered as late as 1929, the delay mostly due to its small size, far distance, and optical faintness. Heavenly bodies such as comets with [parabolic](#) or even [hyperbolic](#) orbits are possible under the [Newtonian theory](#) and have been observed.<sup>[7]</sup>

## 圖三、圖四

接著在部分網頁有說明為什麼大部分是橢圓軌道，例如太陽系形成時的作用、各行星間的引力 (當初在推導的時候  $GMm/r^2$ ， $m$  項是被消掉的)，值得一提的是 [Milankovitch cycles](#)[5]，米蘭科維奇循環說明了，即使是地球的離心率也一直在變化並循環，而不是定值，所以可以說，圓形軌道是一個幾乎不存在的理想模型。

類似的情況例如電子繞行原子核，在 [Bohr](#) 的氫原子模型中假設單顆電子的繞行軌道是圓形，但這無法解釋為什麼原子不會崩壞，因為繞行的時候如果耗損能量，半徑變小應該會讓電子和原子核相撞，而後 [Sommerfeld](#) 提出量子規則成功的連結 [Planck](#) 量子論和波爾的原子模型，並解釋簡併態 (即橢圓軌道)和精細結構 (能階分裂)。

## 關於 $F = ma$ 和 $F=dp/dt$

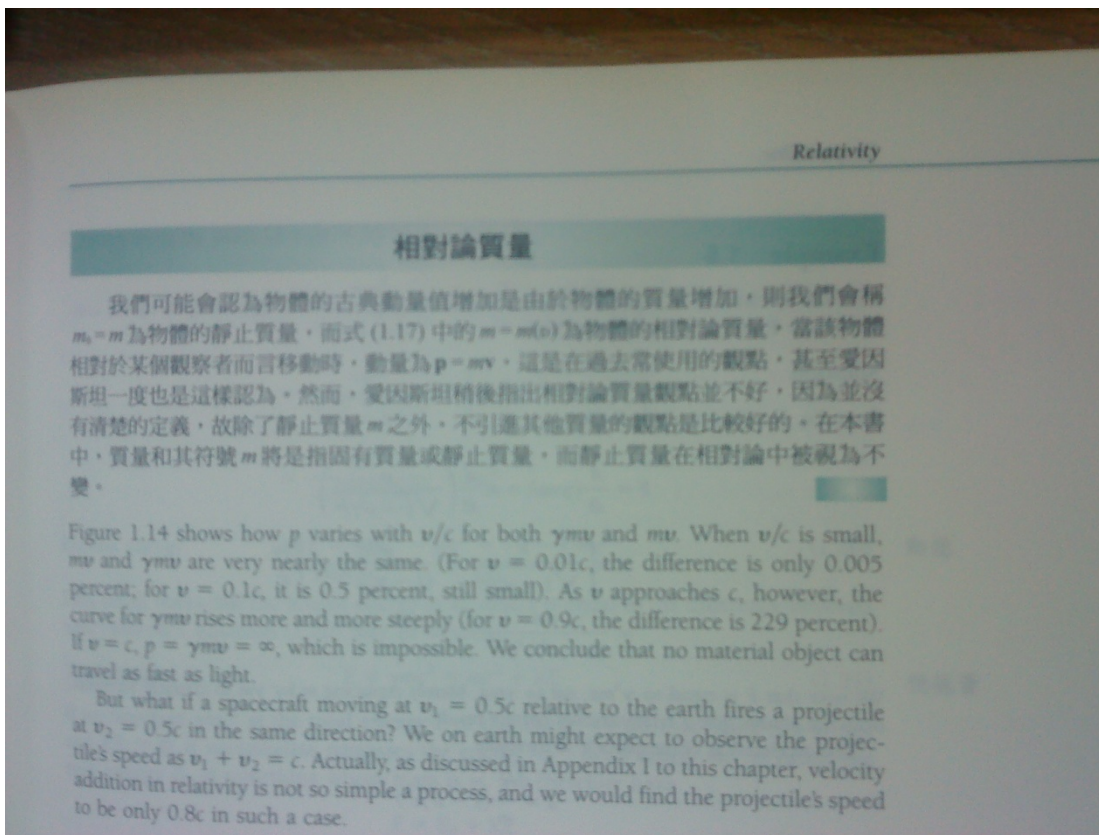
在課堂上老師提到這兩條公式，在相對論中  $F=dp/dt$  是正確的，不過有別於古典物理的  $p=mv$ ，這樣  $p$  就必須是  $\gamma mv$ ，其中  $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$

用 chain rule 可推出：

$$F = dp/dt = d(\gamma mv)/dt = m(d\gamma/dv)(dv/dt) = ma * \gamma^3$$

可以知道  $F=ma$  是  $\gamma=1$  古典近似的結果

而質量改變的說法並不恰當，過去會認為  $p=mv$ ，而  $m$  的增加導致動量增加，甚至愛因斯坦一度也是這樣認為。然而，愛因斯坦稍後指出相對論質量觀點並不好，因為沒有清楚的定義，故除了靜止質量  $m$  之外，不引進其他質量的觀點是比較好的（下圖五，摘自 Modern Physics / Arthur Beiser) [6]



圖五

## 參考文獻

- [1]克卜勒行星橢圓定律的初始內涵 /姚珩、黃秋瑞 <http://phy.ntnu.edu.tw/~yao/kepler.pdf>
- [2]克卜勒三大定律 /成大物理 astrolab  
[http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/e\\_book/distance/captions/kepler\\_laws.html](http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/e_book/distance/captions/kepler_laws.html)
- [3] Orbit 條目 /Wikipedia <http://en.wikipedia.org/wiki/Orbit>
- [4] Kepler's laws of planetary motion /Wikipedia  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s\\_first\\_law#First\\_Law](http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%27s_first_law#First_Law)
- [5]米蘭科維奇循環/Wikipedia[http://en.wikipedia.org/wiki/Milankovitch\\_cycles](http://en.wikipedia.org/wiki/Milankovitch_cycles)
- [6] Modern Physics/Arthur Beiser 張勁燕導讀/P.25
- [7]Why are orbit elliptical /Astro-Tom [http://www.astro-tom.com/technical\\_data/why\\_elliptical.htm](http://www.astro-tom.com/technical_data/why_elliptical.htm)
- [8]Why do the planet Orbit /WiseGEEK  
<http://www.wisegeek.com/why-do-the-planets-orbit-the-sun-in-an-elliptical-fashion.htm>