微分方程

法蘭克老師

1 微分方程

1.1 可分離微分方程

假設$M(x), N(y)$都是定義在某個區間上的連續函數・我們希望解以下類型的常微分方程

$$M(x) - N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.1}$$

以不嚴謹的方法我們可以把(1.1)改寫成

$$N(y)dy = M(x)dx. \tag{1.2}$$

因此我們稱微分方程(1.1)是可分離的・對(1.2)求不定積分之後，得到

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx$$

進而我們利用這個關係來解出我們想要的微分方程。事實上，解微分方程是以下的過程・令$G(y)$是$N(y)$的（對變數y）反導函數

$$\frac{dG}{dy} = N(y).$$

利用微分連鎖律可以驗證合成函數$H(x) = G(f(x))$是$M(x)$的反導函數：

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = N(y)\frac{dy}{dx} = M(x).$$

也就是說

$$\int M(x)dx = H(x) = G(f(x)) + C.$$

處理可分離的微分方程可以分成以下幾個步驟:

(1) 將微分方程改寫成(1.2)的型式。

(2) 將等式兩邊同時積分。

(3) 利用所得到的積分式求出$y = f(x)$的關係。

以下為了方便起見把所有的常數都寫成C不討論其差異性。

範例 1.1 試解出下列微分方程

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

不嚴謹做法：把微分方程改寫為$\dfrac{dy}{y} = dx$.兩邊同時積分

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

之後可以推得: $\ln y = X + C$, 兩邊同時取exp之後可以得到$y = Ce^x$.

嚴謹做法：方程改寫為

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1.$$

我們知道$\dfrac{d}{dy}\ln y = \dfrac{1}{y}$.因此合成函數$H(x) = \ln y(x)$的微分為

$$\frac{dH}{dx} = \frac{1}{y(x)}\frac{dy}{dx} = 1.$$

因此$H(x)$是1的反導函數，可知

$$H(x) = \int 1dx = x + C.$$

所以歸納出$\ln y(x) = x + C$，得到$y = Ce^x$.

範例 1.2 試求出微分方程的解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}.$$

不嚴謹做法：我們把微分方程改寫為$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{1+x^2}$. 兩邊同時積分

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

之後，我們可以推得$\ln y = \tan^{-1} x + C$.因此$y = Ce^{\tan^{-1} x}$.

嚴謹做法：將方程改寫為$\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.由於$\ln y$是$1/y$的一個反導函數．我們令$H(x) = \ln y(x)$，則

$$H'(x) = \frac{1}{y(x)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

因此$H(x)$是$1/(1+x^2)$的一個反導函數．所以

$$H(x)=\int \frac{dx}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C.$$

另一方面$H(x)=\ln y+C$,所以可以歸納出$\ln y=\tan^{-1}x+C$，因此$y=Ce^{\tan^{-1}x}$.

範例 1.3 試解出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2x+1}{y^3+2y}.$$

不嚴謹做法：把方程改寫為$(y^3+2y)dy=(3x^2-2x+1)dx$.兩邊同時積分

$$\int(y^3+2y)dy=\int(3x^2-2x+1)dx,$$

可推得$\dfrac{y^4}{4}+y^2=x^3-x^2+x+C.$

嚴謹做法：將方程改為$(y^3+2y)\dfrac{dy}{dx}=3x^2-2x+1.$ 則$\displaystyle\int(y^3+2y)dy=\frac{y^4}{4}+y^2$．我們取$H(x)=\dfrac{y(x)^4}{4}+y(x)^2$,則

$$H'(x)=(y^3+2y)\frac{dy}{dx}=3x^2-2x+1.$$

於是$H(x)$是$3x^2-2x+1$的一個反導函數．由於

$$\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C,$$

所以可得$H(x)=x^3-x^2+C$．於是我們解出$\dfrac{y^4}{4}+y^2=x^3-x^2+x+C.$

透過這幾個例子大家可以發現所謂的不嚴謹做法只是嚴謹做法的過程簡化而已．在此，我們並非真的把dy與dx 當作數來運算．而是把微分方程分離之後，先求出y變數的反導函數，再利用合成函數與連鎖律的概念去驗證 我們得到的合成函數$H(x)$是右式$M(x)$的反導函數，進而求出微分方程的解．接下來的幾個範例，我們就採用不嚴謹做法來計算．

範例 1.4 試求出方程的解

$$\frac{dy}{dx}=(y-1)(y-2).$$

我們把原方程改寫為$\dfrac{dy}{(y-1)(y-2)}=dx$,兩邊取符號後得到

$$\int\frac{dy}{(y-1)(y-2)}=\int dx=x+C.$$

利用部分分式法，我們將左式積分中的有理函數拆成：

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y-2}.$$

於是$A(y-2)+B(y-1)=1$.所以可以解出$A=-1$且$B=1$.可得

$$\int\frac{dy}{(y-1)(y-2)}=-\int\frac{dy}{y-1}+\int\frac{dy}{y-2}=\ln\left(\frac{y-2}{y-1}\right)+C.$$

所以我們得到了$\frac{y-2}{y-1}=Ce^{x}$.交叉相乘後，我們可以解得y，我們就讓讀者自行驗算·

附註：對$1/y$積分後，我們會得到$\ln y+C$，為了保持讓ln裡面的量是正的，我們就加個絕對值得到$\ln|y|+C$·但在這幾個問題中，我們為了能夠減少符號的使用而暫時忽略絕對值得記號，而因為我們使用了指數函數exp來表達解，最後解似乎也與y的正負無關·從$\ln y$到y就成為了一個中繼過程·然而，正負號其實是的討論是包含在常數C中·如果我們給定微分方程的初始條件（如$y(0)=a$）我們可以決定常數C的值，因此知道了 y的正負號·

1.2 一階微分方程

本章節主要希望研究型如

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{1.3}$$

的解。其中$P(x),Q(x)$是定義在某個區間上的連續函數。當$Q=Q(x)$為零函數時，我們稱此方程為齊次方程，而$Q=Q(x)$非恆等於零時，我們稱此方程為非齊次方程。首先，我們先來研究$Q=0$。則方程可以改寫成

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx.$$

兩邊同時積分之後再取exp可推得$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.接著我們希望來解非齊次的問題。首先我們來提供一個比較直接的作法。假設$z=z(x)$與$y=y(x)$分別滿足

$$\begin{cases} z'+P(x)z &= 0, \\ y'+P(x)y &= Q(x). \end{cases} \tag{1.4}$$

將第二式乘上z減去第一式乘上y之後我們得到

$$y'z-z'y=Q(x)z.$$

於是我們觀察一下微分的商法則可以知道

$$\left(\frac{y}{z}\right)'=\frac{y'z-yz'}{z^2}=\frac{Q(x)}{z}.$$

對上式積分之後我們可以推得

$$\frac{y}{z}=C+\int\frac{Q(x)}{z(x)}dx.$$

兩邊同乘z我們可得

$$y=Cz(x)+z(x)\int\frac{Q(x)}{z(x)}dx.$$

為了區別積分內的變數與積分外的變數，接下來我們會不定積分$\int f(x)dx$的表示法改為$\int^x f(t)dt$。所以上述式子改寫為:

$$y=Cz(x)+z(x)\int^x\frac{Q(t)}{z(t)}dt.$$

另外一個解決這問題的方法是利用微分的乘法法則。我們把(1.3)乘上一個函數h使得

$$h(x)y' + P(x)h(x)y = Q(x)h(x).$$

如果我們找到的h滿足$h' = P(x)h$那麼

$$h(x)y' + P(x)h(x)y = h(x)y' + h'(x)y = (h(x)y)'.$$

進而推得$(h(x)y)' = Q(x)h(x)$.兩邊同時積分之後可得

$$h(x)y = C + \int^x Q(t)h(t)dt.$$

因而得到

$$y = \frac{C}{h(x)} + \frac{1}{h(x)} \int^x Q(t)h(t)dt.$$

當然利用解齊次方程的方法我們知道$h(x) = e^{\int^x P(t)dt}$. 我們把函數$h(x) = e^{\int^x P(t)dt}$稱為(1.3)的積分因子。我們可以把這類問題分成幾個步驟解決。

(1) 求出積分因子。

(2) 微分方程兩邊同乘積分因子。

(3) 利用微分的法則與微積分基本定理求出方程的解。

範例 1.5 試解

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x.$$

本問題的積分因子為$h(x) = e^{\int^x \frac{1}{t}dt} = e^{\ln x} = x$。兩邊同乘$x$之後推得

$$xy' + y = 3x^2.$$

利用微分的法則可知$xy' + y = (xy)'$。於是$(xy') = 3x^2$可推知$xy = C + x^3$.兩邊同除x之後可得$y = Cx^{-1} + x^2$.

範例 1.6 試解

$$y' - y = e^{3x}.$$

本題的積分因子為$h(x) = e^{\int -1dx} = e^{-x}$。兩邊同乘$e^{-x}$後我們得到

$$(e^{-x}y)' = e^{2x}.$$

兩邊同時積分之後可得$e^{-x}y = C + e^{2x}/2$。兩邊同乘e^x我們得到方程的解為$y = Ce^x + e^{3x}/2$。

範例 1.7 試解

$$y' + 2xy = 10x.$$

取積分因子$h(x) = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$. 方程同乘$h(x)$後得到$(e^{x^2}y)' = 10xe^{x^2}$. 兩邊同時積分$e^{x^2}y = \int 10xe^{x^2}dx$. 令$u = x^2$可得$du = 2xdx$,於是

$$\int 10xe^{x^2}dx = 5\int e^u du = 5e^u + C = 5e^{x^2} + C.$$

所以解為$y = Ce^{-x^2} + 5$.

範例 1.8 試解

$$y' + \frac{1}{x}y = 6x + 2.$$

本題積分因子為$h(x) = e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$. 方程兩邊同乘$h(x) = x$可得$(xy)' = 6x^2 + 2x$.積分後得到

$$xy = \int (6x^2 + 2x)dx = 2x^3 + x^2 + C.$$

於是$y = 2x^2 + x + Cx^{-1}$.

1.3 二階常係數微分方程

本章節主要來討論下列二階微分方程的解:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{1.5}$$

其中$a, b, c \in \mathbb{R}$。類似於一階微分方程，當$f(x)$恆為零時，(1.5)稱為齊次方程。而$f(x)$不恆為零時，(1.5)稱為非齊次方程。

老師講解 1 會稱呼這方程是是線性的理由如下。假設y是二次可微分函數，我們定義

$$L[y] = ay'' + by' + cy.$$

那麼L就會滿足下列關係:對任意的二次可微分函數$y = f(x)$與$y = g(x)$，恆有

$$L[af + bg] = aL[f] + bL[g],$$

其中a, b是實數。

首先，我們先來研究齊次方程，接著來看個例子。

範例 1.9 試求出

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

如果我們把微分記為D那麼上述微分方程可以改寫為

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0.$$

假設我們把D當成是一個變數來看並且假設我們可以作因式分解的動作， 那麼再把這微分方程改寫為

$$(D-1)(D-2)y = 0.$$

令$z = (D-2)y$則$(D-1)z = 0$，也就是說$z' - z = 0$。 利用分離變數的方法我們解出$z = C_1e^x$.帶入$z = (D-2)y$之後得到了$y' - 2y = C_1e^x$.利用積分因子法，將此方程乘上 e^{-2x}之後得到$(e^{-2x}y)' = C_1e^{-x}$。兩邊積分後我們推得$e^{-2x}y = C_2 + C_1e^{-x}$。同乘$e^{2x}$之後得到 $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.[1] 當然，這麼作存在著一個問題。我們能否使用因式分解的概念來解決這問題呢?我們必須要去驗證上述的這些關係。由於我們令$z = y' - 2y$，那麼

$$z' - z = (y'' - 2y') - (y' - 2y) = y'' - 3y' + 2y.$$

所以$z' - z = 0$的確等價於原方程。利用這個例子，我們可以來討論更一般的情形。

我們把(1.5)改寫為

$$(aD^2 + bD + c)y = f(x).$$

為了能夠討論$aD^2 + bD + c$的分解情況，我們引入了微分方程的特徵多項式的概念:我們稱

$$\chi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

是(1.5)的特徵方程。由於a是個非零常數，方程兩邊同除a之後 可以得到與原方程等價的方程[2]。所以我們不仿假設$a = 1$。令$\Delta = b^2 - 4c$，稱為 特徵方程的判別式。利用中學所學到的方法我們知道，特徵多項式的根有三種情況。

1. $\Delta > 0$時，特徵方程有兩相異實根λ_1, λ_2.
2. $\Delta = 0$時，特徵方程有重根λ_0.
3. $\Delta < 0$時，特徵方程有共軛複數根$\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$,其中$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

當$f(x)$恆為零時，我們可以把解給完全寫下來。如果$\Delta > 0$，我們把方程改寫成

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0.$$

利用上述想法，我們令$z = (D - \lambda_2)y$則$(D - \lambda_1)z = 0$.於是我們推得$z = C_1e^{\lambda_1 x}$.進而得到$(D - \lambda_2)y = C_1e^{\lambda_1 x}$。利用積分因子的方法，同乘$e^{-\lambda_2 x}$得到了$(e^{-\lambda_2}y)' = C_1e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$.積分之後，推得了 $e^{-\lambda_2 x}y = C_2 + C_1e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$.兩邊在同乘$e^{\lambda_2 x}$解出了

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

當$\Delta = 0$時，方程式可以寫成

$$(D - \lambda_0)^2 y = 0.$$

[1]在這裡我們盡可能讓C_1, C_2表示成一些常數，雖然不同式子中的C_1, C_2未必相等。

[2]意思是說方程的解並不會因此而改變

令$z=(D-\lambda_0)y$.則$(D-\lambda_0)z=0$.利用分離變數的方法我們得到$z=C_1e^{\lambda_0 x}$.所以$(D-\lambda_0)y=C_1e^{\lambda_0 x}$.同乘積分因子$e^{-\lambda_0 x}$之後我們可得$(e^{-\lambda_0 x}y)'=C_1$。兩邊積分之後可知$e^{-\lambda_0 x}y=C_2+C_1x$.同乘$e^{\lambda_0 x}$之後得到

$$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda_0 x}.$$

當$\Delta<0$時，答案比較複雜一點。假設我們可以讓微分方程以複數的型態表示，那麼微分方程的解在$\Delta<0$時，解$y=C_1e^{\lambda_+ x}+C_2e^{\lambda_- x}$. 但是一個實係數的微分方程為何會得到複數解呢?這樣的解是否合理呢?假設我們讓這樣的解存在。利用尤拉的恆等式

$$e^{a+ib}=e^a(\cos b+i\sin b),\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

我們可以推得

$$y=C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x).$$

整理一下$e^{\alpha x}\cos\beta x$與$e^{\alpha x}\sin\beta x$的係數之後，我們可以把方程式的解改寫為

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

當然，我們必須驗證這個函數的確給了方程在$\Delta<0$時的解。令$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$且$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.利用微分的性質我們可以推得

$$\begin{cases} y_1' &= \alpha y_1+\beta y_2\\ y_2' &= \beta y_1+\alpha y_2.\end{cases}$$

由此可以驗證y_1,y_2滿足

$$y''+2\alpha y'+(\alpha^2+\beta^2)y=0.$$

利用根與係數的關係$b=2\alpha$且$c=\alpha^2+\beta^2$。於是我們驗證了y_1,y_2的確是方程在$\Delta<0$時的解，進而推得型如$y=c_1y_1+c_2y_2$都是方程在$\Delta<0$時的解。

老師講解 2 所以我們得出下列歸納:

(1) 當$\Delta>0$時，方程的解型如$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

(2) 當$\Delta=0$時，方程的解型如$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda_0 x}$.

(3) 當$\Delta<0$時，方程的解型如$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

我們來看幾個範例．

範例 1.10 試求出

$$y''-5y'+6y=0.$$

解：此微分方程的特徵多項式為$\chi(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$. 於是$\lambda=3,2$是方程的兩相異實根．則此方程的解為$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$.

範例 1.11 試求出

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

令$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$表示方程的特徵多項式。則此特徵多項式有重根$\lambda = 1$。於是利用上述的歸納我們知道方程的解為 $y = (C_1 x + C_2)e^x$.

範例 1.12 試求出

$$y'' + y' + y = 0.$$

特徵方程為$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$，其根為$\lambda_\pm = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$。利用上述規納的方法可推得方程的解為 $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

接著我們來討論一下非齊次方程的解。在$\Delta > 0$時，我們令$z = (D - \lambda_2)y$時，推得 $z' - \lambda_1 z = f(x)$.利用積分因子的方法可以求出

$$z = C_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x} \int^x f(t) e^{-\lambda_1 t} dt.$$

[3]那麼在帶入$(D - \lambda_2)y = z$可以解出

$$y = C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \int^x z(t) e^{-\lambda_2 t} dt.$$

為了方便起見，我們定義

$$u_i(x) = \int^x f(t) e^{-\lambda_i t} dt, \quad i = 1, 2.$$

將z帶入y之後我們得到

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \int^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_1(t) dt.$$

利用$u_i'(x) = f(x) e^{-\lambda_i x}$與分部積分的方式我們可以推得

$$\int^x e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_1(t) dt = \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} u_1(x) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} u_2(x).$$

將此式帶入y之後我們發現

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{e^{\lambda_1 x} u_1(x) - e^{\lambda_2 x} u_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

我們可以把上式最後一項改寫為

$$\frac{e^{\lambda_1 x} u_1(x) - e^{\lambda_2 x} u_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \int^x \frac{e^{\lambda_1 (x-t)} - e^{\lambda_2 (x-t)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t) dt.$$

[3]由於我們會有很多變數， 為了不要搞混，我使用t來當作積分的參數。

所以推得

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \int^x \frac{e^{\lambda_1(x-t)} - e^{\lambda_2(x-t)}}{\lambda_1 - \lambda_2} f(t)dt.$$

當$\lambda_1 = \alpha + i\beta$,與$\lambda_2 = \alpha - i\beta$時，我們可以推得

$$\frac{e^{\lambda_1(x-t)} - e^{\lambda_2(x-t)}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\alpha(x-t)} \frac{e^{i\beta(x-t)} - e^{-i\beta(x-t)}}{2i\beta}.$$

再利用尤拉公式

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

我們得知

$$\frac{e^{\lambda_1(x-t)} - e^{\lambda_2(x-t)}}{\lambda_1 - \lambda_2} = e^{\alpha(x-t)} \frac{\sin\beta(x-t)}{\beta}$$

所以我們推得當$\Delta < 0$時，其次方程的解為

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x + \int^x e^{\alpha(x-t)} \frac{\sin\beta(x-t)}{\beta} f(t)dt.$$

當$\Delta = 0$時，令$z = (D - \lambda_0)y$則$z' - \lambda_0 z = f(x)$.利用積分因子法，我們推得 $z = C_1 e^{\lambda_0 x} + e^{\lambda_0 x}\int^x f(t)e^{-\lambda_0 t}dt$.再利用積分因子法解$y' - \lambda_0 y = z$可推得

$$(e^{-\lambda_0} y)' = C_1 + \int^x f(t)e^{-\lambda_0 t}dt.$$

兩邊同時積分之後可得

$$y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda_0 x} + e^{\lambda_0 x}\int^x \int^t f(u)e^{-\lambda_0 u}dudt.$$

如果我們令$u_0(x) = \int^x f(t)e^{-\lambda_0 t}dt$.利用$u_0'(x) = f(x)e^{-\lambda_0 x}$分部積分的方法我們可以推得

$$\int^x u_0(t)dt = xu_0(x) - \int^x tf(t)^{-\lambda_0 t}dt = \int^x (x-t)f(t)e^{-\lambda_0 t}dt.$$

所以我們總結得到:當$\Delta = 0$時，

$$y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda_0 x} + \int^x (x-t)e^{\lambda_0(x-t)}f(t)dt.$$

範例 1.13 試解出

$$y'' - 3y' + 2y = 1.$$

令$z = y' - 2y$,我們可以推得$z' - z = 1$。利用積分因子法，我們可以推得$(e^{-x}z)' = e^{-x}$。兩邊積分之後可得$e^{-x}z = C_1 - e^{-x}$。於是$z = C_1 e^x - 1$。 那麼$y' - 2y = C_1 e^x - 1$.再次利用積分因子法可得$(e^{-2x}y)' = C_1 e^{-x} - e^{-2x}$。積分之後在乘$e^{2x}$解出$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 1/2$。

範例 1.14 試解出
$$y''-2y'+y=1.$$

令$z=y'-y$.則$z'-z=1$.利用積分因子法，解出$z=C_1e^x-1$。所以$y'-y=C_1e^x-1$。在利用積分因子法$(e^{-x}y)'=C_1-e^{-x}$。同時積分在乘上e^x可得 $y=(C_1x+C_2)e^x+1$.

在這兩個範例中，我取$f(x)=1$是為了要讓大家理解整個解題的想法而避免複雜計算所定的。然而當$f(x)$為其它函數時，解題只有積分技巧上的差別。

範例 1.15 試解出
$$y''+4y=\cos 3x.$$

特徵方程為$\lambda^2+4=0$.因此我們得到兩共軛複數根$\lambda_\pm=i\pm 2$。於是利用上述公式我們知道
$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\int^x\frac{\sin 2(x-t)}{2}\cos 3tdt.$$
利用積化合差公式
$$\sin 2(x-t)\cos t=\frac{1}{2}\{\sin(2x+t)+\sin(2x-5t)\}.$$
計算之後發現
$$\begin{aligned}y&=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\int^x\{\sin(2x+t)+\sin(2x-5t)\}dt\\&=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\{-\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 3x\}+C\\&=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 3x+C.\end{aligned}$$
於是方程的解為$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 3x+C$.

老師講解 3 所以我們可以歸納出

(a) 當$\Delta>0$時，
$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\int^x\frac{e^{\lambda_1(x-t)}-e^{\lambda_2(x-t)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(t)dt.$$

(b) 當$\Delta=0$時，
$$y=(C_1x+C_2)e^{\lambda_0x}+\int^x(x-t)e^{\lambda_0(x-t)}f(t)dt.$$

(c) 當$\Delta<0$時，
$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)+\int^x e^{\alpha(x-t)}\frac{\sin\beta(x-t)}{\beta}f(t)dt.$$

公式本身有些複雜，但不建議記憶，但非不得已只好查公式使用。然而最重要的地方並不在於公式本身在於解問題的精神。我們透過分解微分方程與積分因子的方法解微分方程。