部分分式

法蘭克

所有實係數多項式的集合我們記為$\mathbb{R}[x]$，在這個集合上我們可以定義加法與乘法，這些運算結構使$\mathbb{R}[x]$構成所謂的環．實有理函數形如$f(x)=P(x)/Q(x)$，其中$P(x),Q(x)$是實多項式且$Q(x)$不是零多項式．而所有實係數有理函數所構成的集合我們記為$\mathbb{R}(x)$.在$\mathbb{R}(x)$中，我們定義加法：

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{P_1(x)Q_2(x)+P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)},$$

與乘法：

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\cdot\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}=\frac{P_1(x)P_2(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}.$$

當$P(x)/Q(x)$分子分母同時不為零多項式時，我們可以定義此有理函數的倒數為

$$\frac{1}{P(x)/Q(x)}=\frac{Q(x)}{P(x)}.$$

這些運算結構會使得$\mathbb{R}(x)$具有域(field)的結構．本章節，我們希望研究有理函數的(不定)積分

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

根據歐幾里德長除法，我們可以找到兩多項式$g(x),r(x)$使得$P(x)=Q(x)g(x)+r(x)$其中$r(x)=0$或$\deg r(x)<\deg Q(x)$．此時，我們可以將有理函數改寫為

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)g(x)+r(x)}{Q(x)}=g(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}.$$

要研究$P(x)/Q(x)$的積分，我們須知道右式的積分．而多項式的(不定)積分我們是清楚的．所以我們要考慮有理函數的積分，我們僅需考慮$\deg P(x)<\deg Q(x)$的情形即可．

1 第一步

首先我們來研究形如

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

的積分．我們令$D=p^2-4q$為多項式$Q(x)=x^2+px+q$的判別式． 則$D>0$多項式有兩實根，$D=0$多項式為重根，$D<0$多項式無實根．首先， 我們來研究$D>0$的情況．

1.1 情況一：$D>0$

範例 1.1 計算積分$\int \frac{dx}{x^2-4}$.

因為$x^2-4=(x-2)(x+2)$所以我們把有理函數做以下拆解：

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}.$$

其中A, B是未知的．要求出A, B兩邊同乘x^2-4我們得到

$$1=A(x+2)+B(x-2).$$

將$x=2$帶入解得$A=1/4$將$x=-2$帶入解得$B=-1/4$．換句話說，

$$\frac{1}{x^2-2}=\frac{1}{4}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+2}.$$

兩邊同時積分後得到

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-4}&=\frac{1}{4}\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}\\&=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

所以一般來說，如果$D>0$我們可以把多項式分解成

$$x^2+px+q=(x-a_1)(x-a_2).$$

且$a_1\neq a_2$．則求A_1, A_2使得

$$\frac{1}{x^2+px+q}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}.$$

如此一來

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+px+q}&=A_1\int \frac{dx}{x-a_1}+A_2\int \frac{dx}{x-a_2}\\&=A_1\ln|x-a_1|+A_2\ln|x-a_2|+C.\end{aligned}$$

1.2 情況二：$D=0$

如果$D=0$,多項式可以分解成

$$x^2+px+q=(x-a)^2.$$

範例 1.2 計算$\int \frac{dx}{(x-2)^2}$.

如果我們令$u=x-2$,則$du=dx$，於是原積分可以改寫為

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x-2} + C.$$

所以一般的情況如下：

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + C.$$

1.3 情況三：$D<0$

我們知道一個特殊的狀況

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C.$$

我們可以利用這個特殊的狀況來解所有$D<0$的情況．

範例 1.3 計算$\displaystyle\int \frac{d}{x^2+x+1}$.

利用配方法

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{2^2}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x+1} &= \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}. \end{aligned}$$

我們令$u=(2x+1)/\sqrt{3}$,則$du=2dx/\sqrt{3}$．所以原積分可以改寫為

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}du}{u^2+1} \\ &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1} u + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

一般來說，$D<0$我們就可以把多項式配方成

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4} \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{-D}{4}. \end{aligned}$$

利用變數變換$u=(2x+p)/\sqrt{-D}$,可推得$du=2dx/\sqrt{-D}$也就是說$dx=\sqrt{-D}du/2$原積分在改寫為

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{x^2+px+q} &= \frac{4}{-D}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}}\right)^2} \\ &= \frac{4}{-D}\cdot\frac{\sqrt{-D}}{2}\int\frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}}\int\frac{du}{u^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}}\tan^{-1}u+C \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}}\right)+C. \end{aligned}$$

2 第二步

接著我們來研究積分

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}dx.$$

當然我們也分成$D>0, D=0, D<0$.

2.1 情況一$D>0$

方程式分成兩根，我們做以下的拆解

$$\frac{mx+n}{x^2+px+q}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}.$$

範例 2.1 計算$\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx.$

我們知道$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$於是我們可以拆

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}.$$

兩邊同乘x^2-2x-3得到

$$5x-3=A(x-3)+B(x+1).$$

帶$x=-1$,得到$A=2$且$x=3$, $B=3$.於是

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-3} = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C.$$

2.2 情況二$D=0$.

先來看以下的範例：

範例 2.2 計算$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$.

我們做以下拆解：

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}.$$

當然我們必須求出A, B:

$$6x+7 = A(x+2) + B.$$

帶$x=-2$,求出$B=-5$而看x的係數可知$A=6$・因此

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} &= 6\int \frac{dx}{x+2} - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2}\\ &= 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + C.\end{aligned}$$

一般的情況：考慮$x^2+px+q=(x-a)^2$我們可以把$mx+n$寫成

$$mx+n = A(x-a) + B.$$

可以解出$A=m$,且$B=n-ma$・於是原有理函數可以改寫為

$$\frac{mx+n}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} &= A\int \frac{dx}{x-a} + B\int \frac{dx}{(x-a)^2}\\ &= A\ln|x-a| - \frac{B}{x-a} + C.\end{aligned}$$

2.3 情況三$D<0$

令$u=x^2+px+q$.則$du=(2x+p)dx$.利用長除法，可以寫成

$$mx+n = r(2x+p) + s.$$

於是

$$\frac{mx+n}{x^2+px+q} = r\frac{2x+p}{x^2+px+q} + s\frac{1}{x^2+px+q}.$$

我們知道

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln|x^2+px+q| + C.$$

而利用前面的方法，我們也可以求出$\int \dfrac{dx}{x^2+px+q}$的積分． 所以我們來看個例子：

範例 2.3 計算$\int \dfrac{3x+5}{x^2+x+1}$.

令$u = x^2+x+1$,則$du = (2x+1)dx$.利用長除法

$$3x+5 = \frac{3}{2}(2x+1) + \frac{7}{2}.$$

於是

$$\frac{3x+5}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x^2+x+1}.$$

於是我們知道(利用前面的結果)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+x+1}dx &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{7}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C \\ &= \frac{3}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.\end{aligned}$$

3 一般的情況

我們已經知道以下幾類的有理函數的積分怎麼計算．

1. $\int P(x)dx$,其中$P(x)$是多項式．
2. $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$
3. $\int \dfrac{A}{(x-a)^n}dx = -A\dfrac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$,其中$n \neq 1$.
4. $\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$,其中$D = p^2-4q < 0$.

接著我們來看看$\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx$的積分，其中$D = p^2-4q < 0$. 因為$D < 0$,所以我們可以利用配方法，把積分改成形如$\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+1)^m}dx$的樣子． 所以我們只需要研究$\int \dfrac{Mx+N}{(x^2+1)^m}dx$即可．接著我們把積分拆成兩塊

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+1)^m}dx = M\int \frac{xdx}{(x^2+1)^m} + N\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}.$$

我們令$u = x^2 + 1$,則$du = 2xdx$．於是

$$\begin{aligned} I_m = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^m} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^m} = \frac{1}{2}\int u^{-m}du \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C & \text{當} m - 1 \text{時，} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{-m+1}}{-m+1} + C = \dfrac{(x^2+1)^{1-m}}{2(1-m)} + C & \text{當} m \neq 1 \text{時．} \end{cases} \end{aligned}$$

接著我們來解另外一個積分，我們令

$$J_m = \int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \int \frac{1}{(x^2+1)^m}dx.$$

利用分部積分，我們推得

$$J_m = \frac{x}{(x^2+1)^m} - \int x\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+1)^m}\right)dx.$$

利用連鎖律

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(x^2+1)^m} = \frac{d}{dx}(x^2+1)^{-m} = -m(x^2+1)^{-m-1}\cdot 2x.$$

所以積分可改寫為

$$J_m = \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}}dx.$$

觀察一下：

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^m} - \frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}.$$

所以

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^m} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}} = J_m - J_{m+1}.$$

於是上述積分可以改寫為

$$J_m = \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m(J_m - J_{m+1}).$$

利用此等式可以推得

$$J_{m+1} = \frac{2m-1}{2m}J_m + \frac{x}{2m(x^2+1)^m}.$$

我們知道$J_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x + C$. 利用遞回關係，我們就可以把所有的$J_m$給求出來．所以我們得到第五個公式：

5. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+1)^m}dx = MI_m + NJ_m + C.$

範例 3.1 計算$\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^2+1}dx.$

利用長除法，我們知道

$$x^4 + x + 1 = (x^2+1)(x^2-1) + x + 2.$$

所以

$$\frac{x^4+x+1}{x^2+1} = (x^2-1) + \frac{x+2}{x^2+1}.$$

我們分別計算：

$$\int (x^2-1)dx = \frac{x^3}{3} - x + C,$$

與

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

與

$$\int \frac{2}{x^2+1}dx = 2\tan^{-1}x + C.$$

因此原積分為

$$\int \frac{x^4+x+1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x + C.$$

接著我們把$Q(x)$分成以下的幾種情況·

3.1 情況一

當$Q(x)$的根都相異時：$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$·則我們可以寫

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}. \tag{3.1}$$

而根據基本的微分性質我們可以求出$A_i = P(a_i)/Q'(a_i),\ 1 \le i \le n$.但我們並不用此方法，我們只要是利用代入法·請見以下例題：

範例 3.2 計算$\displaystyle\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx.$

拆解

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

則

$$x^2+4x+1 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1).$$

將$x = 1$帶入我們得到$A = 3/4$將$x = -1$帶入我們得到$B = 1/2$將$x = -3$帶入我們得到 $C = -1/4$·於是

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+3}.$$

於是原積分等於

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C.$$

3.2 情況二

當$Q(x) = (x-a)^m$時・我們利用歐幾里得長除法我們可以得到：

$$P(x) = A_r(x-a)^r + A_{r-1}(x-a)^{r-1} + \cdots + A_1(x-a) + A_0.$$

所以

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m} = \frac{A_r}{(x-a)^{m-r}} + \frac{A_{r-1}}{(x-a)^{m-r+1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \frac{A_0}{(x-a)^m}.$$

因此利用公式3.我們可以求出這類型的積分・在這裡，我們提供一個計算A_i的公式・如果我們將$x = a$帶入 $P(x)$我們得到$A_0 = P(a)$.將兩邊同時微分後，帶入$x = a$我們得到$A_1 = P'(a)$.利用歸納的方法我們可以求出

$$A_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \quad 1 \le k \le r.$$

範例 3.3 計算$\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)^4}dx.$

令$F(x) = x^3 + x + 1$.我們希望求出A, B, C, D使得

$$F(x) = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D.$$

我們知道$f'(x) = 3x^2 + 1$且$f''(x) = 6x$, $f''(x) = 6$. 於是$D = f(1) = 3$, $C = f'(1)/1! = 4$, $B = f''(1)/2! = 3$, $A = f'''(1)/3! = 1$. 所以

$$F(x) = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 4(x-1) + 3.$$

因此我們得到

$$\frac{x^3+x+1}{(x-1)^4} = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{3}{(x-1)^4}.$$

因此原積分等於

$$\int \frac{x^3+x+1}{(x-1)^4}dx = \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + C.$$

4 情況三

假設$Q(x) = (x^2+px+q)^m$・我們利用長除法，我們可以求出$P(x) = (x^2+Px+q)P_1(x) + M_0x + N_0$. 同理，再對$P_1(x)$使用長除法，可以推得$P_1(x) = (x^2+px+q)P_2(x) + M_1x + N_1$. 把$P_1(x)$帶入$P(x)$後得到

$$P(x) = (x^2+px+q)^2P_2(x) + (x^2+px+q)(M_1x+N_1) + M_0x + N_0.$$

我們使用長除法一直做下去，我們就可以把$F(x)$寫成

$$F(x) = (x^2+px+q)^s(M_sx+N_s) + \cdots + (x^2+px+q)(M_1x+N_1) + (M_0x+N_0).$$

於是有理函數可以改寫為

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{M_s x + N_s}{(x^2+px+q)^{m-s}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{M_0 x + N_0}{(x^2+px+q)^m}.$$

為了符號方便記憶，我們把此式改寫為

$$\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

舉例來說，我們可以找到$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$使得

$$\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)^3} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2+1)^3}.$$

這個問題的直接做法就是用長除法：

$$x^2+3x+2 = (x^2+1) + 3x + 1.$$

於是

$$\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)^3} = \frac{(x^2+1)+3x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{(x^2+1)^3} + \frac{3x+1}{(x^2+1)^3}.$$

5 一般情況

定理 5.1 (實係數多項式的質因式分解定理)任何實係數多項式$Q(x)$在$\mathbb{R}[x]$中都可以分解成

$$Q(x) = A(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_r)^{m_r}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{n_s},$$

其中$A, a_1, \cdots, a_r$是實數，且p_i, q_j是滿足 $p_i^2 - 4q_i < 0$的實數．

簡而言之，任何多項式可以分解成一些一次多項式的次方與二次不可約多項式的次方（這裡的二次不可約多項式指的是無實根的的二次多項式）

利用這個定理，我們就把任何的有理函數拆解成『部分分式展開』：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \left(\frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}\right)\\ &+ \left(\frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(x-a_2)^{m_2}}\right)\\ &+ \cdots + \left(\frac{A_{r,1}}{x-a_r} + \cdots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-a_r)^{m_r}}\right)\\ &+ \left(\frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}\right)\\ &+ \left(\frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{2,n_2}x + C_{2,n_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}}\right)\\ &+ \cdots + \left(\frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{x^2+p_sx+q_s} + \cdots + \frac{B_{s,n_s}x + C_{s,n_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}\right).\end{aligned}$$

舉例來說:

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^5+2x+6}{(x-1)^2(x-2)^3(x+3)(x^2+1)^3(x^2+4)^2} &= \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\right) \\
&+ \left(\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}+\frac{E}{(x-2)^3}\right) \\
&+ \frac{F}{x+3} \\
&+ \left(\frac{Gx+H}{x^2+1}+\frac{Ix+J}{(x^2+1)^2}+\frac{Kx+L}{(x^2+1)^3}\right) \\
&+ \left(\frac{Mx+N}{x^2+4}+\frac{Ox+P}{(x^2+4)^2}\right).
\end{aligned}
$$

範例 5.1 計算$\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx.$

我們可以假設

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

展開之後比較係數可以解得$A=-2, B=1, C=2, D=1$. 因此

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}=\frac{-2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

因此我們得到

$$\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx=-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C.$$

細節我們就讓讀者自行練習．

為何我們可以做部分分式這樣的拆解？理由就在於輾轉相除法原理．同學可以跳過這一段，因為這段比較困難． 然而對於想知道的同學，我就在此補充．

定理 5.2 (Bezout定理)假設$f(x), g(x)$是兩個$\mathbb{R}[x]$中的互質多項式，也就是說它們的最大公因式為1．($(f,g)=1$)．則存在兩個多項式 $u(x), v(x)\in\mathbb{R}[x]$使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

這個定理的証明需要輾轉相除法．我們在此就不談．接著我們利用這個概念來研究

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x^2+1)^4}$$

的部分分式展開．因為$(x-1)^3$與$(x^2+1)^4$互質，可以找到多項式$u(x), v(x)$使得

$$(x-1)^3u(x)+(x^2+1)^4v(x)=1.$$

於是

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^4} = \frac{u(x)}{(x^2+1)^4} + \frac{v(x)}{(x-1)^3}.$$

如果我們希望拆解有理函數$P(x)/Q(x)$其中$Q(x) = (x-1)^3(x^2+1)^4$則

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x^2+1)^4} = \frac{u(x)P(x)}{(x^2+1)^4} + \frac{v(x)P(x)}{(x-1)^3}.$$

因為多項式相乘還是多項式，$u(x)P(x), v(x)P(x)$還是多項式・我們令$P_1(x) = u(x)P(x)$與$P_2(x) = v(x)P(x)$. 則

$$\frac{P(x)}{(x-1)^3(x^2+1)^4} = \frac{P_1(x)}{(x^2+1)^4} + \frac{P_2(x)}{(x-1)^3}$$

換句話說，如果我們看到兩個多項式沒有公因式時，我們的確可以把原來的有理函數拆解成由它們分母是由這兩個互質的 多項式定義的有理函數・也就是說，如果$Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$,且$Q_1(x), Q_2(x)$互質，則可以找到兩個多項式 $P_1(x), P_2(x)$使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

證明就利用到定理5.2.因此我們使用歸納法對Q做因式分解，得到一些互質的多項式相乘・ 如果$Q(x) = Q_1(x)\cdots Q_r(x)$且$Q_1(x), \cdots, Q_r(x)$兩倆互質，則存在多項式$P_1(x), \cdots, P_r(x)$ 使得：

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \cdots + \frac{P_r(x)}{Q_r(x)}.$$

於是我們把多項式分解成最簡單的形態（不可約多項式的乘積）我們就得到了我們想要的部分分式地展開・ 舉例來說：$P(x) = (x-1)^2(x+3)^3(x^2+1)^2(x^2+4)^5$. 則

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-1)^2} + \frac{P_2(x)}{(x+3)^3} + \frac{P_3(x)}{(x^2+1)^2} + \frac{P_4(x)}{(x^2+4)^5}.$$

於是想要求部分分式展開，我們就只需求出各不可約因式所決定的部分分式展開・而我們前幾個章節 已經介紹了如何對$P(x)/(x-a)^n$與$P(x)/(x^2+px+q)^m$做部分分式的展開・因此我們就完成了 部分分式展開的理論・