克拉瑪公式及其應用：
假設給一個線性方程組：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

我們可把此表為矩陣方程式：

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

其中 $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ ，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 。

記（第 k 行的行向量換成向量 b）

$$\Delta_k = \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & b_3 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{k}$$

那麼

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k$$

其中 $\Delta = \det(A)$ ，則上是稱之為克拉碼公式。
例 1：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{11}x_1 + a_{22}x_2 = b_1 \end{cases}$$

則

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} ，\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

所以

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$$
$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$$

以此例子來說，我們發現此方程式有唯一解的充要條件是 $\Delta \neq 0$ ，假設在此條件下我們想把解給求出來，計算一下不難發現

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

如果我們令

$$B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

則我們發現

$$A \cdot B = B \cdot A = I_2$$

定義：任意給定一個 $n \times n$ 矩陣 A 若存在一個 $n \times n$ 矩陣 B 使得 $AB = BA = I_n$。則我們稱矩陣 B 為矩陣 A 的反矩陣，並且記為 $B = A^{-1}$。

現在我們來求出一般反矩陣的公式：先考慮 $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$， $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$，

$$AB = I_n$$

看此矩陣方程式是否有解？如果記 $\vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，（第 k 個座標為 1 其他為零的向量）

則我們將面臨

$$A\vec{b}_k = \vec{e}_k$$

其中

$$\vec{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

利用克拉碼法則可知

$$\det(A) \cdot b_{jk} = \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{j}$$

於是我們令 $a^{kj} = \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}^{j}$，我們稱此行列式為 a_{jk} 的餘因子。

並且我們可以獲得另外一個矩陣

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{21} & \cdots & a^{n1} \\ a^{12} & a^{22} & \cdots & a^{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a^{1n} & a^{2n} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

我們稱此矩陣為矩陣 A 的古典伴隨矩陣。如果 $\det(A) \neq 0$，那麼

$$b_{jk} = \frac{a^{jk}}{\det(A)}$$

所以

$$B = \frac{1}{\det(A)} A^{adj}$$

那麼以上的矩陣就是我們想求的反矩陣了。

例 2.假設

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}，B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

並且

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

那麼

$$\det(A) b_{11} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a^{11}$$

$$\det(A) b_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a^{12}$$

$$\det(A)b_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a^{13}$$

類似的我們可以計算出其他的餘因子。
對一般的不是可逆矩陣，我們依然有下列的式子：

$$A \cdot A^{adj} = \det(A) I_n$$

因此當 $\det(A) \neq 0$ ，則有 $B = \dfrac{1}{\det(A)} A^{adj}$ 。

習題：是計算出下列矩陣的古典伴隨矩陣。

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

應用：GRAM 行列式

例 3.假設$\vec{u}$不平行於$\vec{w}$，試求出$|\vec{u}-t\vec{v}|$的最小值。

例 4.假設$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$不落在同一個平面上，試求出$|\vec{u}-t\vec{v}-s\vec{w}|$的最小值。

解：我們發現當(α,β)被選取為$\vec{u}-\alpha\vec{v}-\beta\vec{w}\perp E_{\vec{u},\vec{w}}$時$|\vec{u}-t\vec{v}-s\vec{w}|$有最小值，那即是說：

$$(\vec{u}-\alpha\vec{v}-\beta\vec{w})\cdot\vec{v}=0$$
$$(\vec{u}-\alpha\vec{v}-\beta\vec{w})\cdot\vec{w}=0$$

那就是說

$$(\vec{v}\cdot\vec{v})\alpha+(\vec{v}\cdot\vec{w})\beta=\vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$(\vec{v}\cdot\vec{w})\alpha+(\vec{w}\cdot\vec{w})\beta=\vec{w}\cdot\vec{u}$$

因為$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$不落在同一平面上，此行列式為

$$\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}=|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2-(\vec{v}\cdot\vec{w})^2>0$$

所以由克拉碼法則可知：

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}$$

$$\beta=\frac{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}$$

於是我們可以記

$$P_{\vec{v},\vec{w}}(\vec{u})=\frac{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}\vec{v}+\frac{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}\vec{w}=\frac{-1}{\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}}\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{u}\\ \vec{v} & \vec{w} & 0\end{vmatrix}$$

則此函數稱為向量$\vec{u}$在平面$E_{\vec{u},\vec{w}}$（由向量$\vec{v},\vec{w}$所張成的平面）上的垂直投影。

定義：$\Gamma(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}$，$\Gamma(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{v}\cdot\vec{v} & \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{v}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{w} & \vec{w}\cdot\vec{u}\\ \vec{v}\cdot\vec{u} & \vec{w}\cdot\vec{u} & \vec{u}\cdot\vec{u}\end{vmatrix}$

分別稱為向量$\vec{u},\vec{v}$與向量$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$的 GRAM 行列式。

應用 GRAM 行列式去解最小直線問題：
假設任給一些資料點$(x_1,y_1),\cdots(x_n,y_n)$，我們想找出一條直線 $y=ax+b$，使得

$$E(a,b)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-ax_k-b)^2$$

有最小值。如果這樣的直線存在，那麼我們稱這條直線為回歸直線或是最適合直線。如果記$\bar{v}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\bar{w}=(1,\cdots,1)$，$\bar{u}=(y_1,\cdots,y_n)$，那麼這個極小值的問題變成求$|\bar{u}-a\bar{v}-b\bar{w}|^2$的最小值的問題。上面討論可求出其解，我們現在也討論另外一種表示方法：上面討論可知解數對(a,b)等價於解

$$\begin{cases}\left(\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2\right)a+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)b=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k\\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)a+nb=\sum_{k=1}^{n}y_k\end{cases}$$

如果令 $A=\begin{pmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ x_n & 1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$，那麼原方程式可改寫為

$$A^T AX=A^T Y$$

由於如果 x_i 相異則 $\det(A^T A)>0$，A 為可逆矩陣。

可知

$$X=(A^T A)^{-1}A^T Y$$

習題：試計算向量$\bar{u}$在平面$E_{\bar{u},\bar{w}}$（由向量$\bar{v},\bar{w}$所張成的平面）上的垂直投影。與他們的 GRAM 行列式。

1. $\bar{u}=(1,0,-1)$，$\bar{v}=(0,2,0)$，$\bar{w}=(-3,2,1)$
2. $\bar{u}=(0,1,2)$，$\bar{v}=(1,-1,-1)$，$\bar{w}=(-3,0,-3)$
3. $\bar{u}=(0,1,0)$，$\bar{v}=(0,1,-3)$，$\bar{w}=(1,4,-5)$
4. $\bar{u}=(x_1,x_2,x_3)$，$\bar{v}=(1,1,1)$，$\bar{w}=(y_1,y_2,y_3)$
5. $\bar{u}=(x_1,x_2,x_3)$，$\bar{v}=(z_1,z_2,z_3)$，$\bar{w}=(y_1,y_2,y_3)$