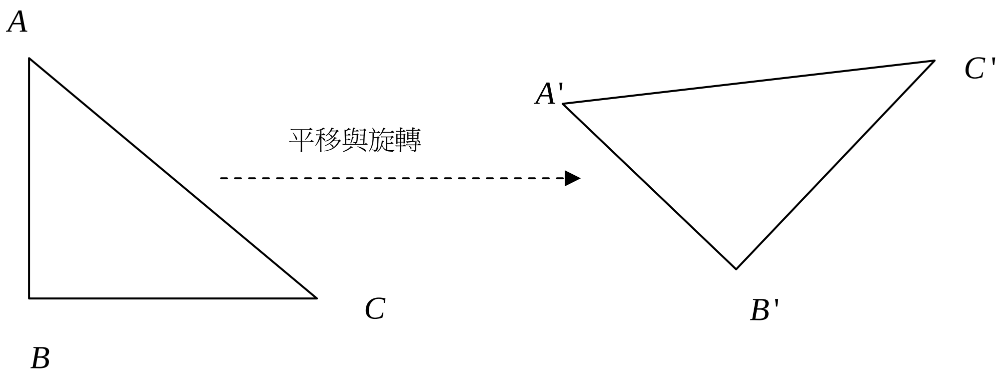
向量與內積

劉珈銘

幾何物體在平移，旋轉，鏡射的作用之後，幾何物體本身的形狀並沒有任何的改變，邊長不變，對應的角度也不會變。透過這個特性，想研究幾何物體，我們便將幾何物體放置於座標系之中，其物體的幾何特性並不會因為座標在上述作用之後就有所改變，於是我們可以透過代數的方法來研究幾何學，這樣的方法簡化了很多輔助線，以及使用古典幾何繁複的證明。舉例來說，我們將三角形 ABC 旋轉，並且平移至新的座標 $A'B'C'$。雖然三角形的座標不同，但是這兩個一樣還是全等三角形。



我們說兩幾何物體特性相等指的是這兩個幾何物體是「全等」的。

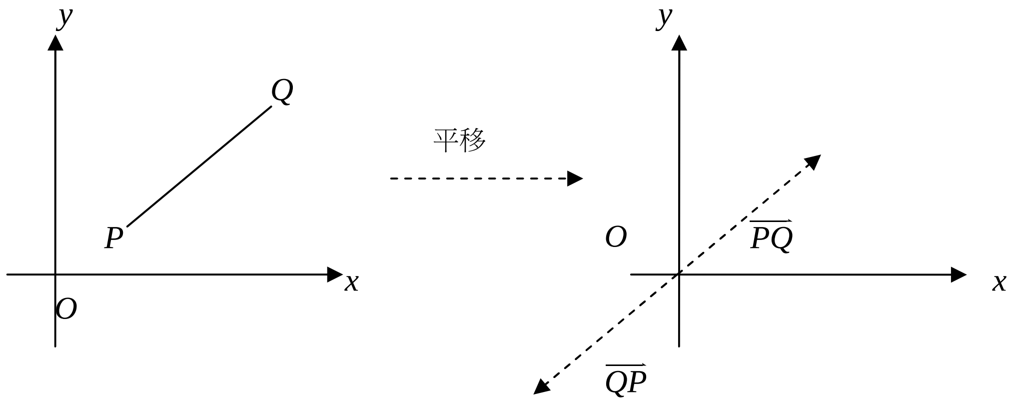
因此，為了方便我們研究幾何物體，我們便將幾何物體放置在一個方便我們研究的座標系中。例如，將某個頂點放置在原點。或者是將三角形的外心放置在原點。至於該怎麼放置我們的幾何物體得仰賴於我們對問題研究的經驗，這沒有一個標準答案。而「位移向量」的概念正是將幾何物體的**某個頂點**放在原點，如此放置座標系的確是有他的方便之處，而最大的好處就是可以透過所謂的「內積」去計算出幾何物體內的某個角度，或者是邊長。

假設給定平面中的兩點 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，由 P 至 Q 的位移向量定義為

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

此位移向量的長度**定義**為 $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 。請注意，由 Q 至 P 的位移向量為 $\overline{QP} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ ，如圖所示，我們發現這兩個向量長度相等但是方向相反。這不僅僅是告訴我們，位移向量的概念不僅包含了長度，也包含了方向性。

所以向量是一個具有方向與長度的數學的概念。



說明：位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的實際意義是說，我們怎麼去描述從 P 沿著 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向移動至 Q，$\overrightarrow{PQ}$ 不只描述了物體的移動方向，也描述了物體行走的距離。

觀察 $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QP}$ 向量的 x 座標與 y 座標，我們發現一個有趣的事實

$$x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) \text{ 與 } y_2 - y_1 = -(y_1 - y_2)$$

也就是說其 x 座標與 y 座標分別差一個負號。假設 $\vec{u} = (x, y)$ 是一個位移向量，且 a 為一個實數，那麼我們**定義**

$$a \cdot \vec{u} = (ax, ay)$$

稱為向量的係數積。就可以發現，透過**向量的係數積定義**，

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-1)\cdot(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (-1)\cdot\overrightarrow{QP}$$

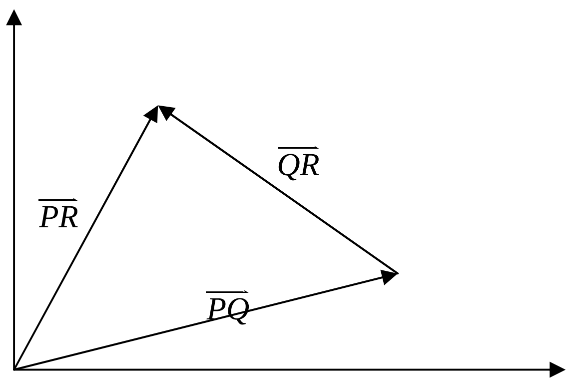
因此，如果給了一個向量 $\vec{u}$，$-\vec{u}$ 的幾何意義便是與原向量同長度但是方向相差 180 的向量。

習題 1.試討論向量 $a \cdot \vec{u}$ 的幾何意義。

如果給定平面中一個三角形與其三個頂點 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), R(x_3, y_3)$，假設我們將 P 點平移至原點得到三位移向量 $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 與 $\overrightarrow{PR} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$，$\overrightarrow{QR} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$，如下圖所示。那麼觀察上述向量的關係我們發現：

$$x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) \text{ 與 } y_3 - y_1 = (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) \text{ 。}$$

也就是說呢，$\overline{PR}$向量的x座標與y座標分別是$\overline{PQ}$與$\overline{QR}$的x座標與y座標的和。



假設任給兩個位移向量$\vec{u} = (x, y), \vec{v} = (x', y')$，我們**定義**

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$$

稱為向量$\vec{u}, \vec{v}$的和。那麼由此**定義**，我們不難發現

$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}.$$

所以這就給出了向量和的幾何意義。

任給平面中的三角形ABC，將A平移至原點，並且B, C的新座標分別為$B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$。

為了讓符號簡單，我們用$\vec{u}$表$\overline{AB}$，$\vec{v}$表$\overline{AC}$，由餘弦定理可知

$$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{AB}\,\overline{AC}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

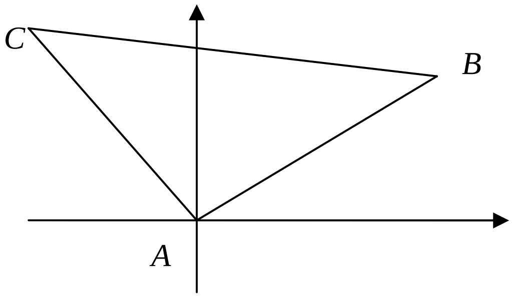
於是我們定義一個量稱為**向量$\vec{u}$與$\vec{v}$的內積**：

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

則我們發現，$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos A$。如圖所示。由此我們可以得到一個重要的不等式：

科西不等式

$$\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|$$



所以如果知道了向量的內積，我們便可以求出其向量的夾角。反之，如果知道了向量的夾角，也可以求得向量的內積。令一方面，我們也發現到

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2.$$

所以知道了向量的內積，也可以求得向量的長度。

以下作為向量內積的應用，我們來計算三角形的面積。如上圖，我們知道，三角形的面積為

$$\Delta=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\sin A$$

因此我們可得 $2\Delta=\overline{AB}\times\overline{AC}\sin A$，令一方面，由向量內積定義可知

$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AB}\times\overline{AC}\sin A$。由於 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，我們將兩式平方之後相加得到

$$(2\Delta)^2+(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2=\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2,$$

因此我們知道

$$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2}.$$

將 $\overline{AB}=(x_1,y_1),\overline{AC}=(x_2,y_2)$ 帶入 $\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AC})^2$ 可得

$$({x_1}^2+{y_1}^2)({x_2}^2+{y_2}^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

因此可得 $\Delta=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$，**我們記**

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$$

那麼三角形面積公式成為

$$\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|.$$

如果我們想要求由向量$\bar{u},\bar{v}$所張成的平行四邊形面積，那麼從三角形面積為平行四邊形的二分之一知道

$$\square=\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$

其中$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$稱為**向量$\bar{u},\bar{v}$的行列式**。

附註：雖然我們人為的**定義**了一些數學概念，如向量和與係數積，向量的內積與行列式等等，儘管這些定義看起來似乎沒有任何的意義，然而只要了解了定義是為了表現出幾何的概念，那麼這樣的定義也不是那麼突兀。也就是說，**數學的定義是有其目的的，並非天外飛來一筆。**