

# Elementary Numerical PDE

Advection equation  
with discontinuous solution.

## 摘要

討論當 Advection equation 之正解為不連續解時, 一些數值方法逼近其正解的程度, 收斂速度以及收斂條件。利用 MATLAB 繪圖, 觀察其逼近解隨時間的變化。

應數所98

L16961183

陳鈺壬

email:c1492404@gmail.com

2008.01

## 1 簡介

考慮 advection equation, 對於一般平滑解, 可以利用有限差分法將其離散化, 用以逼近其正解。但是對於不平滑解, 甚至不連續解, 其有限差分法是否一樣逼近到其正解? 在此我們嘗試幾種有限差分法, 並探討各種差分法之優劣。

## 2 Advection Equation With Discontinuous Solution

考慮 Advection equation

$$\begin{aligned}u_t + cu_x &= 0 & -1 < x < 1 & \quad 0 < t < 1 \\u_0(x) &= 1 & -1 < x < -0.5 \\u_0(x) &= 0 & -0.5 < x < 0\end{aligned}$$

其中  $c$  為波速。根據我們所學的偏微分方程, 我們知道此問題之正解為  $u_0(x - ct)$ 。首先考慮三種有限差分法: (1) Upwind (2) Lax-Friedrichs (3) Lax-Wendroff。

### 2.1 Upwind

首先考慮一階收斂的 Upwind 法。在此為簡化問題, 我們令  $c = 1$ , Upwind 方法將  $u_t + cu_x = 0$  離散化成

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ck}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n)$$

$k$  為對時間離散化,  $h$  為對空間離散化。我們令  $k/h = 0.5$  以及  $0.8$ , 分割為  $n = 100, 200, 400, 800$ , 畫出  $t$  從 0 到 1 秒的圖。其中藍色實線為正解, 紅色為數值解。

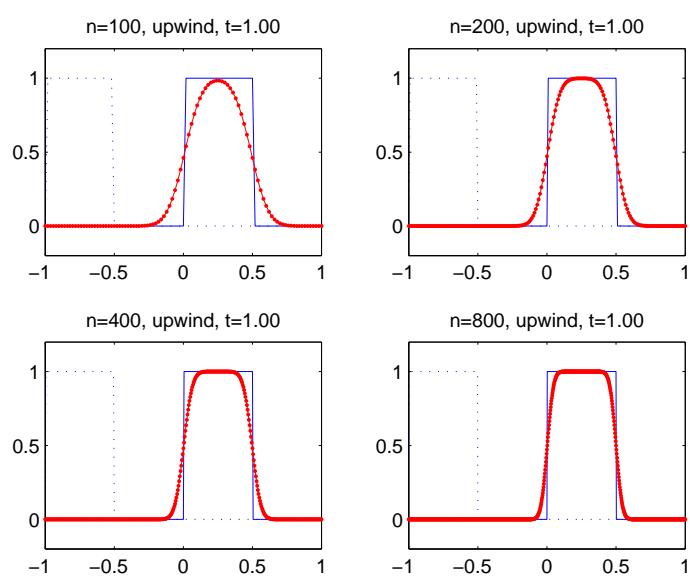


圖 1:  $k/h=0.5$

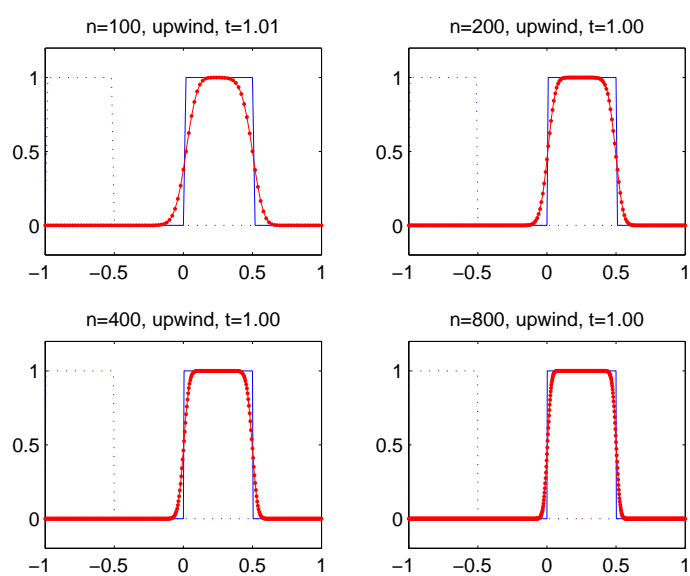


圖 2:  $k/h=0.8$

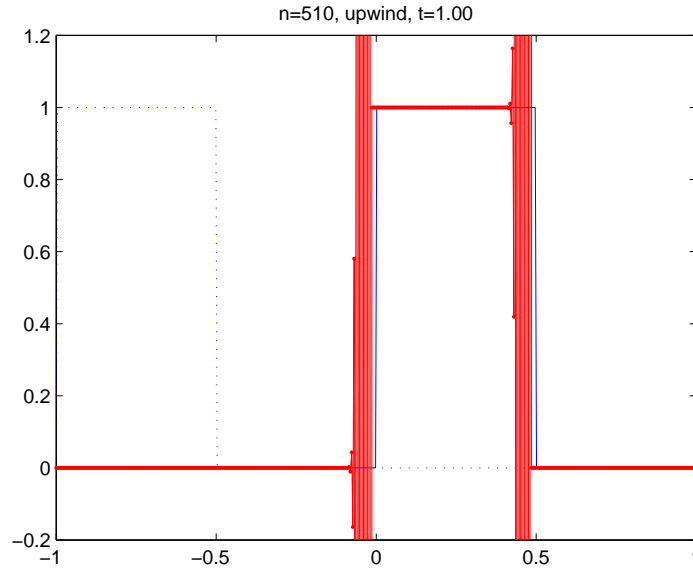


圖 3:  $k/h=1.02$

從圖 1, 圖 2 上皆可看出, 隨著分割越取越細, 其數值解將越逼近正解。但是因為正解為不連續解, 隨著時間越來越大, 其數值解與正解的誤差越來越大, 在此我們暫時先不考慮其收斂性。

當  $k/h \leq 1$  時, 此方法將會是穩定的。我們試著令  $k/h = 1.02$ , 如圖 3, 發現其數值解會產生不穩定的現象。

## 2.2 Lax-Friedrichs

同樣地, 接下來我們採用同為一階的 Lax-Friedrichs 法。離散化後為

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ck}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n)$$

條件與 Upwind 法都一樣。

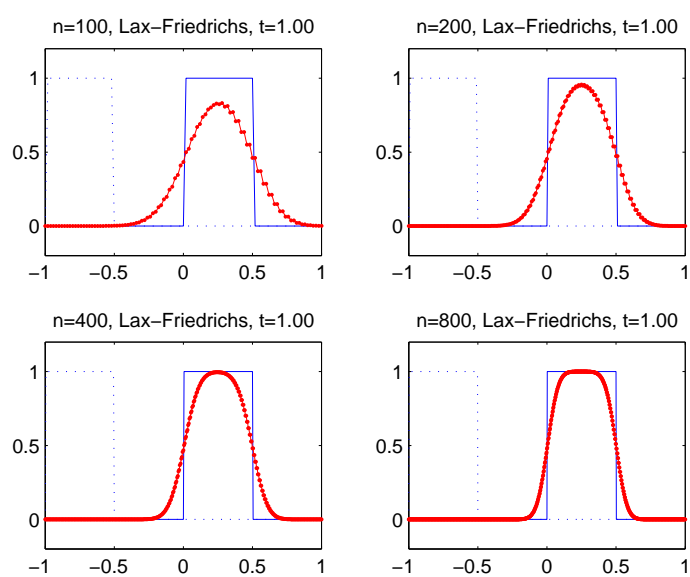


圖 4:  $k/h=0.5$

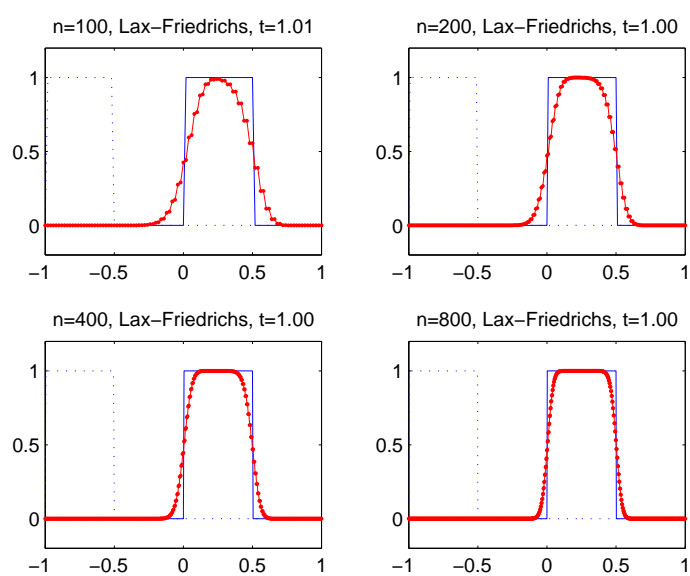


圖 5:  $k/h=0.8$

從圖4, 圖5我們可以發現, 當分割越來越細, 其數值解越逼近正解。而 Lax-Friedrichs 法隨著時間越久, 數值解會越來越差, 幾乎無法逼近正解。此種情形在 Upwind 法中也有發生。至於為何會產生此現象? 我們考慮 modified equations。Modified equation of Upwind

$$u_t + cu_x = \frac{1}{2}ch\left(1 - \frac{ck}{h}\right)u_{xx}$$

Modified equation of Lax-Friedrichs

$$u_t + cu_x = \frac{h^2}{2k}\left(1 - \frac{c^2k^2}{h^2}\right)u_{xx}$$

會發現多了擴散項 $u_{xx}$ , 使得這兩個式子變為 advection-diffusion equations。而其擴散係數, 在 $k/h = 0.5, c = 1$ 的條件之下, upwind 法為 $h/4$ , Lax-Friedrichs 法為 $3h/4$ , 所以我們可以預期, 在相同的時間內, Lax-Friedrichs 法之數值解擴散掉的速度會比 upwind 法來得快, 所以在圖上才會產生此現象。

而穩定條件相同的是 $k/h \leq 1$ , 當 $k/h = 1.02$ 時, 如圖6, 數值解將會產生不穩定的現象。

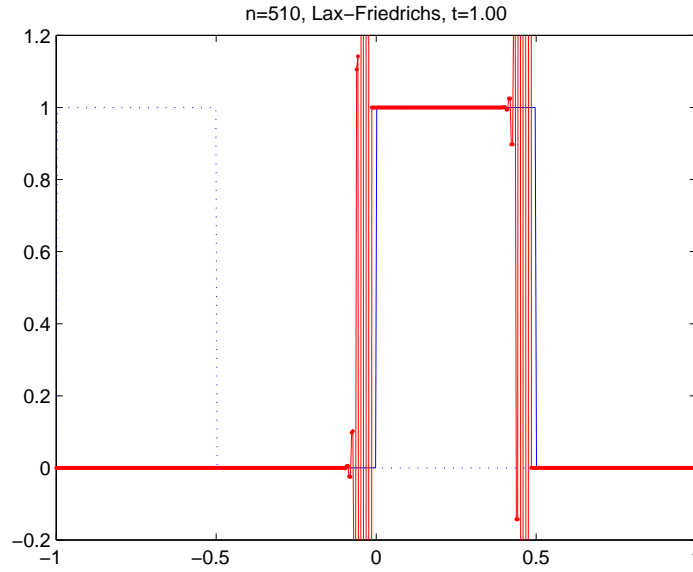


圖 6:  $k/h=1.02$

### 2.3 Lax-Wendroff

接著我們採用二階收斂法 Lax-Wendroff。離散化後為

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ck}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{c^2k^2}{2h^2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n)$$

在相同的條件之下，其圖形如圖 7，圖 8。

我們觀察到在值從 0 跳到 1 或是從 1 跳到 0 的地方，其數值解會產生振盪，振盪的高度幾乎不變，而其寬度隨著分割越細，寬度越窄。而  $k/h$  逼近 1 時，其數值解也較逼近正解。至於振盪產生的原因，我們考慮其 modified equation。

Modified equation of Lax-Wendroff

$$u_t + cu_x = \frac{1}{6}ch^2\left(\left(\frac{ck}{h}\right)^2 - 1\right)u_{xxx}$$

我們發現多了 dispersion 項  $u_{xxx}$ ，所以其變成 dispersive equa-

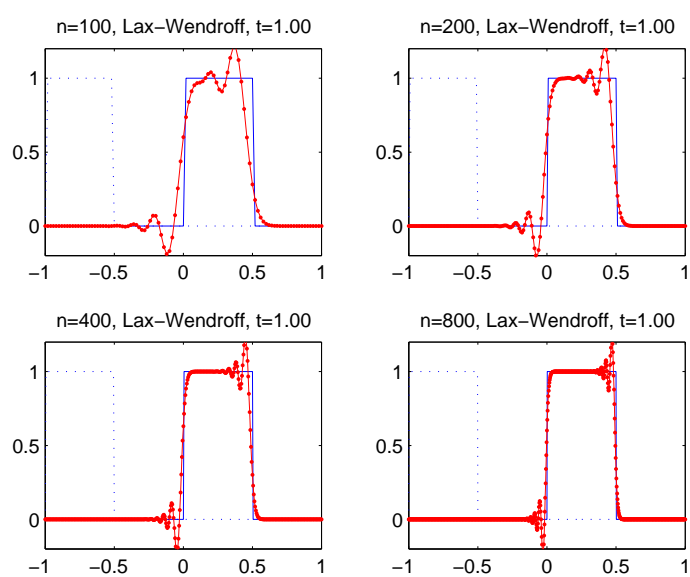


圖 7:  $k/h=0.5$

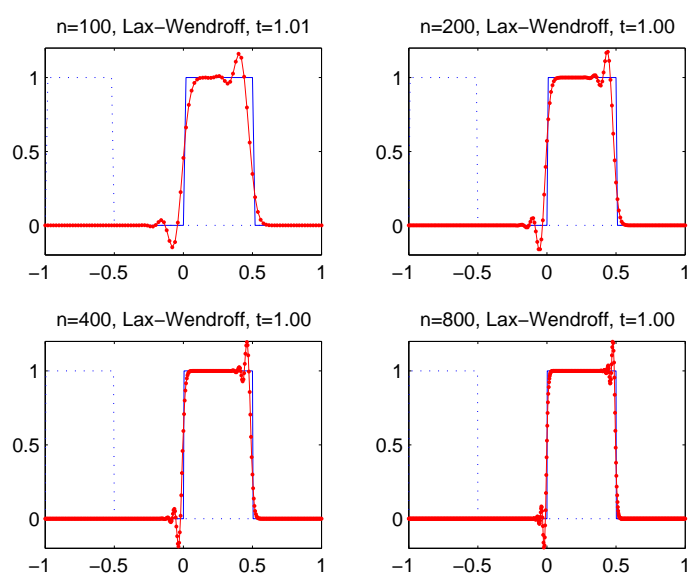


圖 8:  $k/h=0.8$



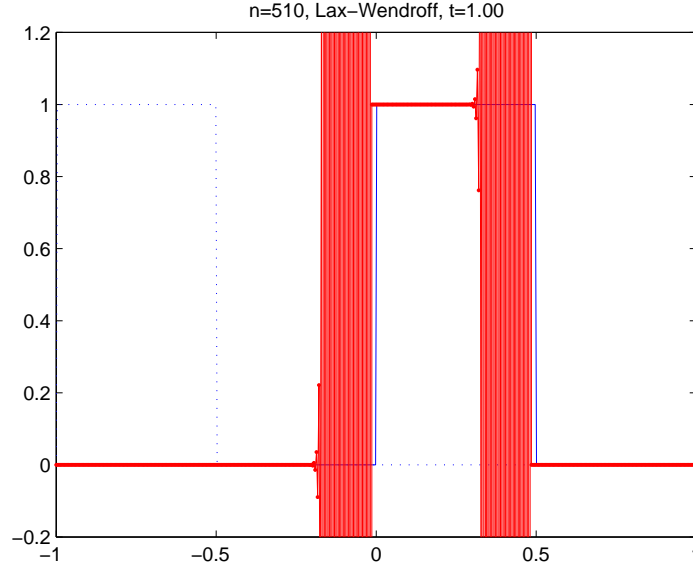


圖9:  $k/h=1.02$

tion。考慮其傅立葉級數，我們可以得到

$$u(x, t) = e^{i(\xi x - c(\xi)t)}$$

令  $\frac{1}{6}ch^2((\frac{ck}{h})^2 - 1) = \mu$ ，將上式代入 dispersive equation，我們可以得到  $c(\xi) = c\xi + \mu\xi^3$ 。此式為 dispersive equation 的 dispersion relation。振盪波的傳播速度為  $c_p(\xi) = c(\xi)/\xi = c + \mu\xi^2$ ，我們稱作 phase velocity for wave number  $\xi$ ，是此波最高點的傳播速度。另一個較重要的速度為  $c_g(\xi) = c'(\xi) = c + 3\mu\xi^2$ ，稱作 group velocity。

對於我們討論的不連續解問題，其傅立葉係數在  $\xi \rightarrow 0$  的時候，其係數就像  $1/\xi$ 。所以當時間越久，這些振盪項跟著分散掉，導致我們在圖7，圖8看到圖形振盪的結果。

## 2.4 準確性

在此我們取 1-norm 去探討其誤差。因為 modified equation 的數值解跟正解幾乎一樣，我們考慮各種方法與其 modified equation 的誤差。一階方法的 modified equation 之解為

$$u^D(x, t) = 1 - \operatorname{erf}((x - ct)/\sqrt{4Dt})$$

where

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2} dx.$$

而原始題目 advection equation 的解為  $u_0(x - ct)$ ，所以誤差為

$$\begin{aligned} \|u(., t) - u^D(., t)\| &= 2 \int_{-\infty}^0 \operatorname{erf}((x)/\sqrt{4Dt}) \\ &= 2\sqrt{4Dt} \int_{-\infty}^0 \operatorname{erf}(z) dz \\ &= C_1 \sqrt{Dt} \\ &\approx C_2 \sqrt{ht} \end{aligned}$$

當  $h$  逼近 0,  $k/h$  固定的時候。此件事情告訴我們 1-norm error 頂多只有  $O(h^{1/2})$ ，也就是其 order 頂多為  $h^{1/2}$ 。同樣地，二階方法做出來的 order 頂多為  $h^{2/3}$ 。

根據 Godunov 的定理，對於一個解為不連續的 advection equation 問題，一個線性，單調的逼近法最多只有一階的準確性。

### 3 Nonlinear method

#### 3.1 Artificial Viscosity

將 Lax-Wendroff 法改爲

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ck}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{c^2k^2}{2h^2}(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n) + kQ(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n)$$

在此 $Q$ 爲我們新引進的 artificial viscosity。Modified equation

$$u_t + cu_x = h^2Qu_{xx} + \frac{h^2}{2k}\left(1 - \frac{c^2k^2}{h^2}\right)u_{xxx}$$

從前一節我們知道, 在 Lax-Wendroff 中, dispersion 項是造成振盪的主要原因。而現在有 diffusion 項可以與其比較, 我們希望在振盪產生的時候,  $Q$  足夠大使得其數值解不產生振盪。所以令  $Q$  是與  $U^n$  有關係的, 使得此數值方法是非線性的。所以加入在 Lax-Wendroff 法中最後一項改爲黏性變數

$$k[Q(U^n; j)(U_{j+1}^n - U_j^n) - Q(U^n; j-1)(U_j^n - U_{j-1}^n)]$$

其中 $Q(U^n; j)$ 爲跟原始資料有關的黏性變數。更一般的狀況下, 對於任何高階 flux 函數 $F_H(U; j)$ , 我們將其更改爲 Modified flux function

$$F(U; j) = F_H(U; j) - hQ(U; j)(U_{j+1} - U_j).$$

這個方法難在我們不曉得該怎麼決定足夠的  $Q$  使得其數值解會較逼近正解。接下來我們要介紹的 flux-limiter 法就是決定  $Q$  的一種作法。

#### 3.2 Flux-limiter methods

因爲高階 flux 法 $F_H(U; j)$ (像是 Lax-Wendroff flux) 在較平

滑的區域較逼近正解，而低階 flux 法  $F_L(U; j)$  (一些單調法) 則是在不連續的地方會逼近得比較好。所以我們想把  $F_H(U; j)$  及  $F_L(U; j)$  單純以  $F(U; j)$  表示，使其在平滑的地方採用  $F_H$ ，而在不連續的地方採用  $F_L$ 。

$$F_H(U; j) = F_L(U; j) + [F_H(U; j) - F_L(U; j)]$$

因為其要與原始資料有關，所以 flux 會變成

$$F(U; j) = F_L(U; j) + \Phi(U; j)[F_H(U; j) - F_L(U; j)]$$

其中  $\Phi(U; j)$  為 limiter。如果  $U$  是平滑的，則  $\Phi(U; j)$  接近 1，而在不連續點附近，則使  $\Phi(U; j)$  接近 0。

我們令  $F_H$  為 Lax-Wendroff flux，而  $F_L$  採用一階 upwind flux。將 advection equation 用 Lax-Wendroff 離散化後寫得像再加上個 upwind 項。

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ck}{h}(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{ck}{2h}(1 - \frac{ck}{h})(U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n)$$

其對應的 flux 可以寫成

$$F(U; j) = cU_j + \frac{1}{2}c((1 - \frac{ck}{h}))(U_{j+1} - U_j)\phi_j$$

其中  $\phi_j = \Phi(U; j)$ 。

接下來則是如何去測量資料為平滑的。我們採

$$\theta_j = \frac{U_j - U_{j-1}}{U_{j+1} - U_j}.$$

如果  $\theta_j$  接近 1 則表示在  $U_j$  附近為平滑的，如果跟 1 差很多則表示在  $U_j$  附近有不平滑的圖形產生。令  $\phi_j$  為  $\theta_j$  的函數，則  $\phi_j = \phi(\theta_j)$ ， $\phi$  為任意函數。

因此我們再將 flux 項寫進去, 得到

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{k}{h} \left\{ c(U_j - U_{j-1}) + \frac{1}{2}c(1 - \frac{ck}{h})[(U_{j+1} - U_j)\phi_j + (U_j - U_{j-1})\phi_{j-1}] \right\}$$

我們如果挑較平滑的 limiter function

$$\phi(\theta) = \frac{|\theta| + \theta}{|\theta| + 1}.$$

則稱作 Lax-Wendroff with van Leer flux limiter。

而 limiter function 如果挑

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(\theta, 2)).$$

則稱作 Lax-Wendroff with Superbee flux limiter。接下來我們利用這兩種逼近法, 來考慮與之前相同的 advection equation 問題。

在所有條件都相同的情況下, 利用 Lax-Wendroff with van Leer flux limiter 逼近, 其結果如圖 10 及圖 11。可以觀察得出在連續點的地方, 其數值解是類似 upwind 方法的, 所以不會產生原本 Lax-Wendroff 振盪的現象。而其數值解穩定條件則與之前 Lax-Wendroff 一樣為  $k/h \leq 1$ , 如圖 12。

Lax-Wendroff with Superbee flux limiter 也會發生類似的情形, 如圖 13, 圖 14。

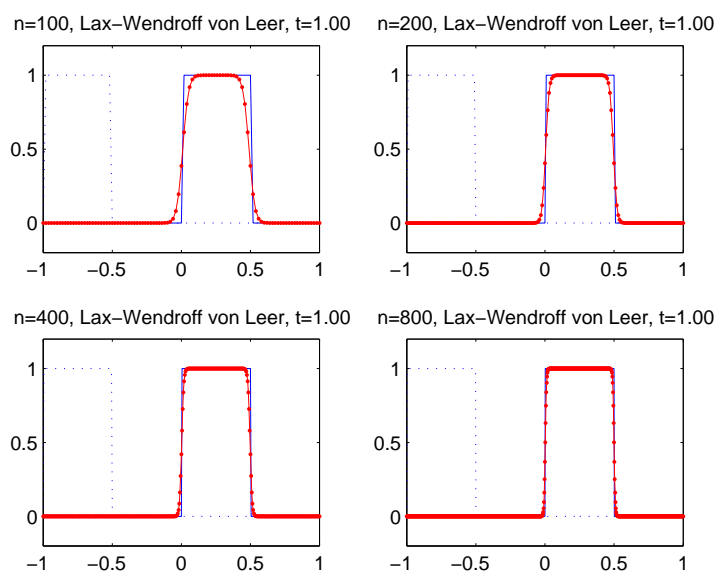


圖 10:  $k/h=0.5$

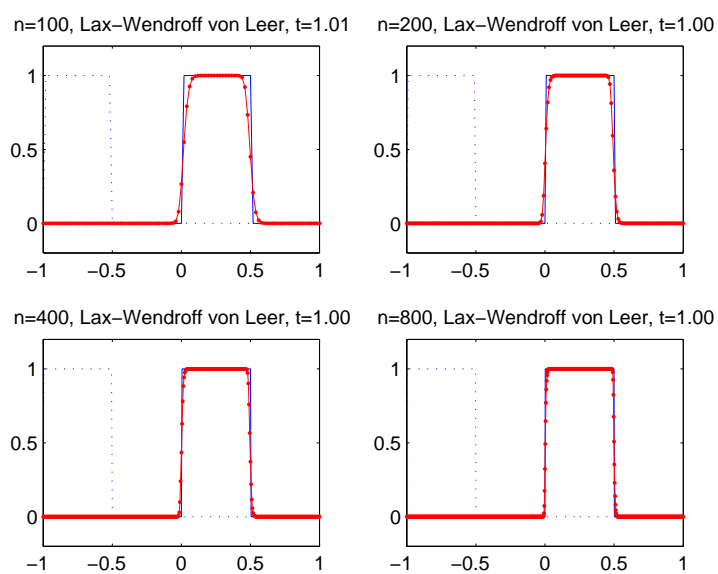


圖 11:  $k/h=0.8$

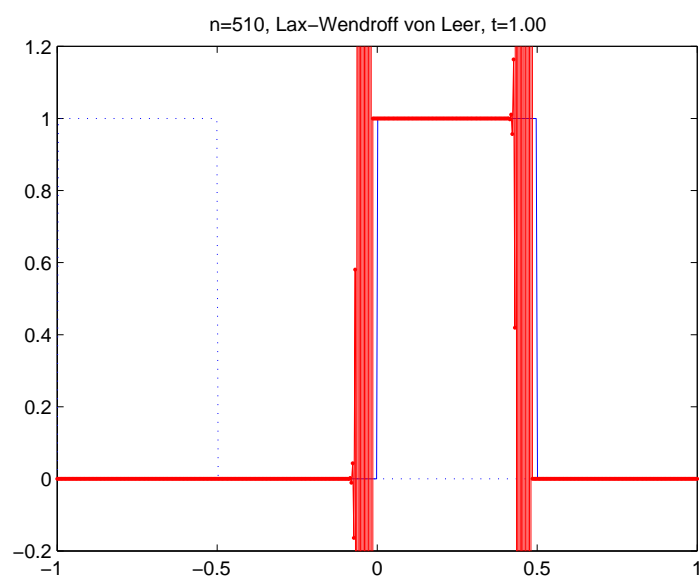


圖 12:  $k/h=1.02$

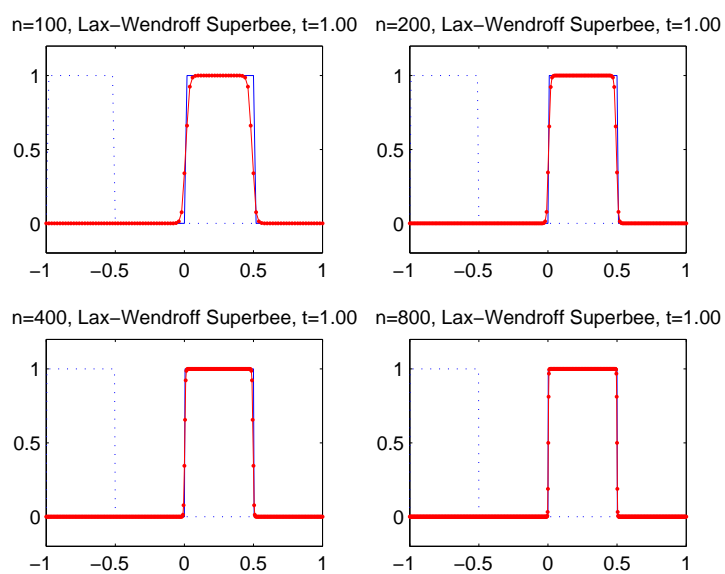
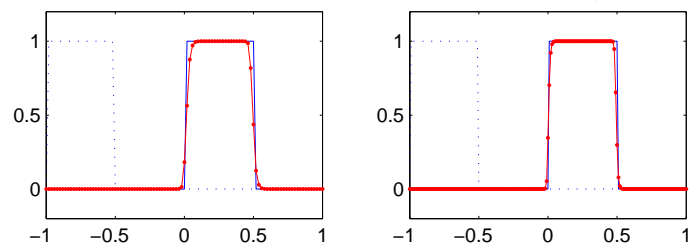


圖 13:  $k/h=0.5$

n=100, Lax-Wendroff Superbee, t=1.01      n=200, Lax-Wendroff Superbee, t=1.00



n=400, Lax-Wendroff Superbee, t=1.00      n=800, Lax-Wendroff Superbee, t=1.00

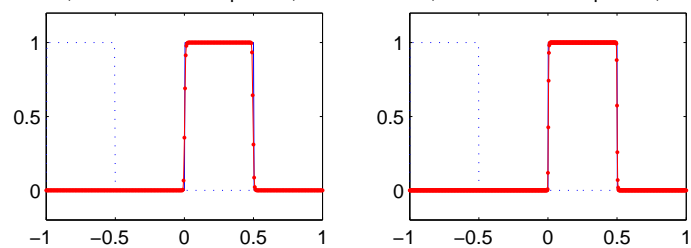


圖 14:  $k/h=0.8$

n=510, Lax-Wendroff Superbee, t=1.00

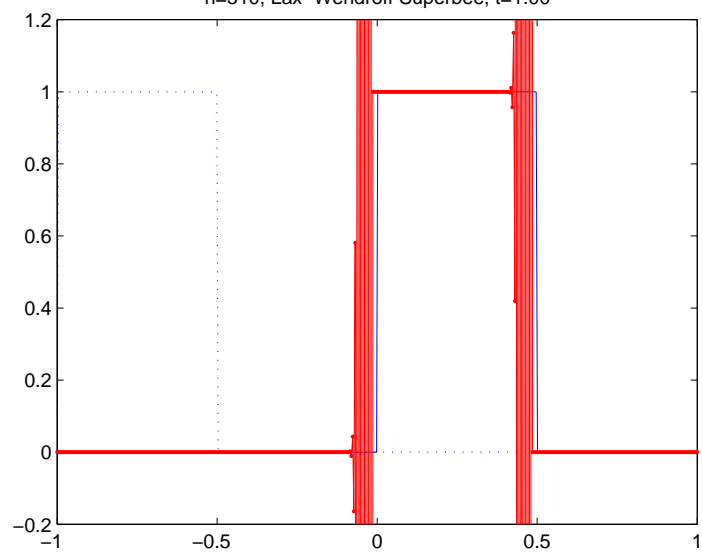


圖 15:  $k/h=1.02$



### 3.3 準確性

這裡的 flux limiter 法可以看作是 modified equation of Lax-Wendroff 加上 modified equation of upwind。前者在平滑的地方至少為二階收斂的，而 upwind 經過 modified 之後也是二階收斂，所以這裡的 flux limiter 將會是二階收斂的。

## 4 結論

對於一般平滑初始值的 advection equation 問題，幾乎都可以用前三種線性方法去逼近，隨著  $h$  越來越小，其數值解會逼近正解。但如果解為不連續的話，無法順利逼近其正解。誤差取 max-norm 時將會逼近  $1/2$ ，即使以 1-norm 去估計，其 order 不到一階。因此折衷的方法是分別取各有限差分法在各自逼近得好的地方，去構造出二階收斂方法有限差分法，藉以逼近此不連續解。

### 4.1 參考資料

1. <http://www-math.mit.edu/cse/>
2. Randall J. LeVeque. Finite Difference Methods for Differential Equations.
3. 陳旻宏老師 愛心資料