

准考証號碼:

姓名:

說明: 共九大題, 九頁試題。並請寫完整的解答過程。背面也可作答, 但請將題號註明清楚。

1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. 令三向量 $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, 3, 1)$.

(a) (5 分) 求 \vec{b} 垂直於 \vec{a} 之分量。

(b) (5 分) 求 \vec{c} 垂直於 \vec{a} , \vec{b} 所決定之平面的分量。

2. (a) (7 分) 證明正弦定理: 對任意三角形 ABC , 若 a, b, c 分別為角 A, B, C 的對邊, 則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- (b) (8 分) 在空間中有一個四面體 $OABC$, 求

$$\frac{\sin \angle OAB \cdot \sin \angle OBC \cdot \sin \angle OCA}{\sin \angle OBA \cdot \sin \angle OCB \cdot \sin \angle OAC}$$

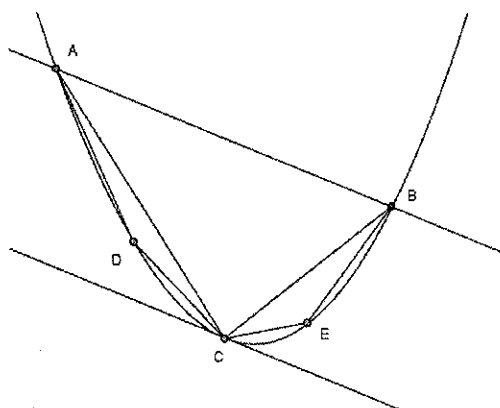
3. (a) (5 分) 如圖, 在拋物線 $y = kx^2$ 上給兩點 $A = (a, ka^2), B = (b, kb^2)$. 在 C 點拋物線之切線與弦 \overline{AB} 平行。求 C 點的座標。

(b) (10 分) 承上題, 拋物線之切線在 D 點與弦 \overline{AC} 平行, 拋物線之切線在 E 點與弦 \overline{BC} 平行, 做三角形 ACD ; 拋物線之切線在 E 點與弦 \overline{BC} 平行, 做三角形 BCE 。證明:

$$\frac{\triangle ACD \text{面積} + \triangle BCE \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}} = \frac{1}{4}$$

(c) (5 分) 求

$$\frac{\text{拋物線和弦 } \overline{AB} \text{ 所圍成的面積}}{\triangle ABC \text{面積}}$$



4. (a) (5 分) 若 n 為奇數, 證明: $n^2 - 1$ 必為 8 的倍數。
- (b) (5 分) 若 $p(x)$ 為一個整係數多項式, 證明: $p(2012) - p(12)$ 必為 2000 的倍數。
- (c) (5 分) 已知 $p(x)$ 為一個整係數多項式, 且 $p(12) = 3$, 試問 $p(2012)$ 是否能為某個整數的平方?

5. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha$.

(a) (5 分) 試證明: $\alpha \leq \frac{\pi}{6}$.

(b) (10 分) 試證明: $\alpha < \beta$.

6. (15 分) 在正整數 2 到 1000 當中, 請問有多少個數 n , 可以寫成 $n = m^k$? 其中 m, k 為大於 1 的正整數。

7. (10 分) 我們嘗試給出一個數學歸納法證明明顯錯誤的敘述:「若一個集合由 n 部車子所組成, 則這 n 部車子具有相同的顏色」。這個題目希望你 (妳) 能指出數學歸納法到底哪裡證錯了。

令敘述 $S(n)$ = 有一個由 n 部車子所形成的集合必具有相同的顏色。我們想用數學歸納法「證明」這個敘述 $S(n)$ 對所有 $n \geq 1$ 之自然數皆成立。

步驟一、證明 $S(1)$ 是成立的: 因為 1 部車本來就只有 1 種顏色, 所以 $S(1)$ 是正確的。

步驟二、假設 $S(k)$ 成立, 證明 $S(k+1)$ 亦成立:

令這 $k+1$ 部車子所形成的集合為 $\{C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}\}$, 並觀察兩個子集合

$A = \{C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_k\}$, $B = \{C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_{k+1}\}$.

由於集合 A 和集合 B 都只有 k 部車, 依據歸納法假設, 集合 A 內的車子是同一種顏色, 集合 B 內的車子也是同一種顏色。但是兩個集合事實上皆有 C_1 這部車, 所以集合 A 內車子的顏色, 和集合 B 內車子的顏色都和 C_1 這部車的顏色相同, 也就是 $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}$ 這 $k+1$ 部車子事實上顏色都相同, 從而得證敘述 $S(k+1)$ 在 $S(k)$ 的前提下是成立的。

試指出數學歸納法到底哪裡出錯了?

8. 設 $a > b$ 是兩正整數，輾轉相除法是一種求 a, b 之最大公因數的演算法，整個演算法可以用以下等式表示：

第一步： $a = q_1 \cdot b + r_1$ (a 被 b 除，得商 q_1 ，餘數 $r_1 \geq 0$)

第二步： $b = q_2 \cdot r_1 + r_2$ (b 被 r_1 除，得商 q_2 ，餘數 $r_2 \geq 0$)

第三步： $r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$ (r_1 被 r_2 除，得商 q_3 ，餘數 $r_3 \geq 0$)

.....

當 $r_k = 0$ 時，演算法終止，且 a, b 之最大公因數 $= r_{k-1}$.

- (a) (5 分) 試證明輾轉相除法在有限步驟內一定會終止。
- (b) (5 分) 試證明當 $r_k = 0$ 時，輾轉相除法可以正確找到 a, b 之最大公因數。
- (c) (5 分) 為加快輾轉相除法之運算速度，我們可做以下調整 (以第一步為例，以下相同)，考慮

$$a = bq + r \quad (r \geq 0), \quad a = b(q + 1) + (r - b) \quad (r - b < 0)$$

若 $r > |r - b|$ ，則令第二步之 $r_1 = |r - b|$ 。若 $r \leq |r - b|$ ，則令第二步之 $r_1 = r$ 。

試說明這樣的調整，會減少輾轉相除法所需要的運算步驟。

- (d) (5 分) 令 $a = 55, b = 34$ 。試算出以兩種輾轉相除法求出最大公因數，分別需要的運算步數？

9. 已知在一個社區內得到特定疾病之機率為 0.005。現在有一種新的篩檢該疾病之方式，該篩檢方式之統計結果如下：在一個已知得該疾病之病人身上，該檢測成功得出陽性 (positive) 結果之機率為 0.99。另一方面，對於一個確定未感染該疾病的人，該檢測可以正確得出陰性 (negative) 結果之機率也是 0.99。換句話說，該檢測正確分類出一個已知結果之病例，機率高達 99%。試問：

- (a) (10 分) 對於一個未知是否染病之病例，該篩檢方式正確判斷出來染病與否之機率各有多高？
- (b) (5 分) 你覺得該篩檢方式算精確嗎？為什麼？