

國立成功大學九十六學年度 數學系 申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第1頁]

個人申請編號: _____

姓名: _____

說明: 此 A 卷共有9題, 每張1題, 請寫完整的解答過程 (禁止使用計算器)。

(1) (10%) $ABCDEFGH$ 是邊長為 1 的正八邊形, 求向量 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$ 的長度。

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第2頁]

(2) (10%) 有一賭局玩法如下：由玩家在 1 號到 6 號其中一號押注 a 元。然後由莊家一次擲 3 顆骰子。如果 3 顆骰子恰有 1 個出現玩家所押注號碼則莊家歸還玩家 a 元並另給 a 元獎金。如果 3 顆骰子恰有 2 個出現玩家所押注號碼則莊家歸還玩家 a 元並另給 $2a$ 元獎金。如果 3 顆骰子恰有 3 個出現玩家所押注號碼則莊家歸還玩家 a 元並另給 $3a$ 元獎金。其他情況莊家沒收玩家 a 元。請問這是否是個公平的賭局？為什麼？

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第3頁]

(3) (10%) 找出所有滿足不等式

$$\log_4(x+1) + \log_2(3-x) > \log_4(13-5x)$$

的實數 x 。

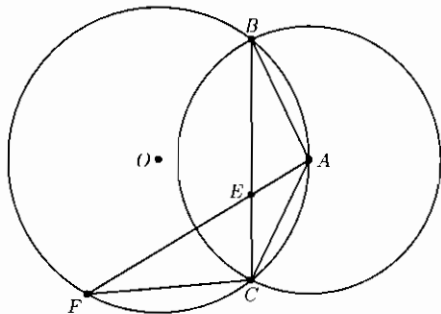
國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第4頁]

(4) (10%) 求以下級數之和。

$$\sum_{i=1}^{2007} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第5頁]

(5) (10%) 如下圖。設兩圓以 O 點及 A 點為圓心，且 A 點在另一圓之圓周上，兩圓相交於 B, C 兩點。設 F 點在以 O 為圓心之圓上， \overline{AF} 與 \overline{BC} 相交於 E 點。若 $\overline{AE} = 1, \overline{EF} = 3$ ，求 \overline{AB} 。



國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第6頁]

(6) (15%) 考慮方程式 $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ 。

(a) 求出此方程式的三個根。

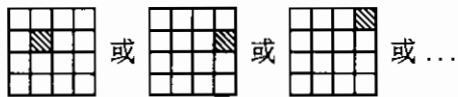
(b) 這三個根在複數平面上成一三角形。試求三角形的外心 (以一複數表示)。


國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第7頁]

(7) (15%) 我們定義 " π " 為單位圓之面積。證明: $\pi > 3$

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第8頁]

(8) (15%) 在 $2^n \times 2^n$ 方格中拿走任一格的圖形稱為虧格 A_n 。例如, A_2 的虧格有



等共 16 種。請證明當 $n \geq 1$ 時, A_n 的任一種虧格, 均可用數個形如  (可旋轉其方向) 的不重疊的磁磚來將其完全鋪蓋住。

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 A 卷 [共9頁/第9頁]

(9) (15%) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 皆為正數。試證明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4)(1 + a_5) \geq (1 + \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5})^5$$

國立成功大學九十六學年度 數學系 申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第1頁]

個人申請編號: _____

姓名: _____

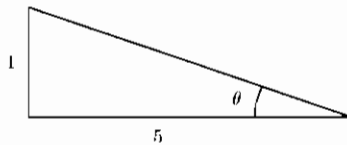
說明: 此 B 卷共有8題, 每張1題, 請寫完整的解答過程 (禁止使用計算器)。

(1) (10%) 已知 $a \neq b$, 求以下方程式之解:

$$\begin{vmatrix} a+b & x & (a+b)^2 \\ x+b & a & (x+b)^2 \\ x+a & b & (x+a)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第2頁]

(2) (10%) 下圖為一個直角三角形。請問 8θ 是銳角、直角或鈍角？



國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第3頁]

(3) (10%) 假設你在進行一個遊戲節目。有三扇門供你選擇，一扇門後面是一輛轎車，另兩扇門後面分別都是一頭山羊。你的目的當然是要想得到比較值錢的轎車，但你卻並不能看到門後面的真實情況。主持人先讓你作第一次選擇。在你選擇了一扇門後，知道其餘兩扇門後面是什麼的主持人，打開了另一扇門給你看，裡面是一頭山羊。現在主持人告訴你，你還有一次選擇的機會。那麼，請你考慮一下，你是堅持第一次的選擇不變，還是改變第一次的選擇而選擇另一扇門，會更有可能得到轎車？為什麼？

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共 8 頁/第 4 頁]

(4) (15%) 若有一定義在實數上的函數 f , 滿足 $f(1) = \sqrt{2}$ 且對所有的有理數 a, b , 滿足

$$f(a-b) = \frac{f(a)}{f(b)}.$$

求

(a) $f(0) = ?$

(b) $f(\frac{4}{3}) = ?$

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第5頁]

(5) (15%) 三角形 ABC 中, 若外心為 O , 垂心為 H , 試證:

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}.$$

可使用外心、垂心的向量公式:

$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2, \quad \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}\overline{AC}^2,$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2).$$

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第6頁]

(6) (15%) 定義 $\sigma(n)$ 為 n 的所有正因數之和, 例如:

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4, \sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7.$$

證明: 如果 m, n 互質, 則 $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共 8 頁/第 7 頁]

(7) (15%) 有一 $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ 的正方形。

(a) 設有 101 點在正方形內部, 證明: 必定存在兩點, 其距離 $\leq \sqrt{2} \text{ cm}$ 。

(b) 設有 90 點在正方形內部, 證明: 必定存在兩點, 其距離 $\leq \sqrt{2} \text{ cm}$ 。(提示: $\pi > 3$, 而 $\sqrt{2} < 1.5$ 。)

國立成功大學九十六學年度 數學系申請入學數學科試題 B 卷 [共8頁/第8頁]

(8) (15%) 令 S 為球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, L 為直線 $\{x = 3, y = 0\}$, R 為點 $(1, 3, 2)$ 。考慮一動點 P 在球 S 上移動, 另一動點 Q 在線 L 上移動, 請問 $\overline{PQ} + \overline{QR}$ 的最小值為何?