

本測驗為計算與證明,共五大題,請將演算過程寫在答案紙上,先標明題號,再作答。

1. 設 $p(x)$ 為實係數多項式滿足 $p(0) = 0$ 且對任意自然數 n 恒有 $p(2n+1) = 2p(n) + 1$, 求 $p(x)$. (20分)
2. 令 $A = \{(x, y) : 0 < x < 1 \text{ 且 } 1 - \log_x y < \log_{\frac{x}{y}}(x^2 y)\}$, 試在平面上圖示區域 A . (20分)
3. 一警報器長鳴一次 2 秒, 短鳴一次 1 秒, 而各鳴放間隔 1 秒, 問歷時 25 秒可放出幾種不同的信號? (20分)
4. 橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上之切線交 x 軸, y 軸於 A, B 兩點,
(1) 若原點為 O , 則 $\triangle AOB$ 之面積最小值為多少? (10分)
(2) \overline{AB} 之最小值為多少? (10分)
5. 證明: 對任意自然數 n , $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ 恒為 2^n 之倍數. (20分)