

本測驗為計算與證明，請將演算過程寫在答案紙，務必標明題號

1. 若  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  為實數,  $\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k$  (16%)
- (a) 證明  $\sum_{k=1}^n |a_k - m_d| \leq \sum_{k=1}^n |a_k - a| \forall a \in \mathbb{R}, m_d$  為  $a_1, \dots, a_n$  之中位數.
- (b) 若  $a_1 \leq \dots \leq a_n, b_1 \geq \dots \geq b_n$  則  $\sum_{k=1}^n (a_k - \bar{a})(b_k - \bar{b}) \leq 0$ .
2. (a) 求  $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$  在複數平面上之根. (8%)
- (b) 求(a)諸根在平面上所圍成多邊形面積. (8%)
3. 一老鼠在迷宮中某點, 它各有  $\frac{1}{2}$  機會選擇左, 右兩方向出發, 若選擇右邊, 則3分鐘後會回到原點. 若選擇左邊則有  $\frac{1}{3}$  機會經2分鐘後成功走出去, 而有  $\frac{2}{3}$  的機會在3分鐘後回到原點. 求老鼠被困在迷宮之時間期望值. (10%)
4. 若  $\triangle ABC$  為邊長1之正三角形,  $P$  為  $\overline{BC}$  上一點, 但  $P \neq B, P \neq C$ . 令  $r$  與  $R$  分別為  $\triangle ABP$  的外接圓半徑 (16%)
- (a) 求  $\frac{r}{R}$  之值. (b) 求  $r + R$  之最小值.
5. 設  $n$  為自然數, 令  $f(n) = (\frac{4}{5})^n (n^2 + 4n)$  (16%)
- (a) 求使  $f(n)$  最大的  $n$  值.
- (b)  $f(n)$  最大值的整數部分是幾位數? 試求之. ( $\log 2 = 0.3010$ )
6. 若三度空間中二直線  $x = y + 2a = \frac{z-2a+2}{3}, 2x + a = y - 2a = \frac{2z+5}{3}$  (16%)
- (a) 若此二直線相交, 求交點.
- (b) 求包含此二直線之平面方程式.
7. 解  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . (10%)