1 積分的座標變換

為了計算一些看似不容易算的重積分，如，

$$\iint_{\mathbb{D}} e^{x^2+y^2}dA,$$

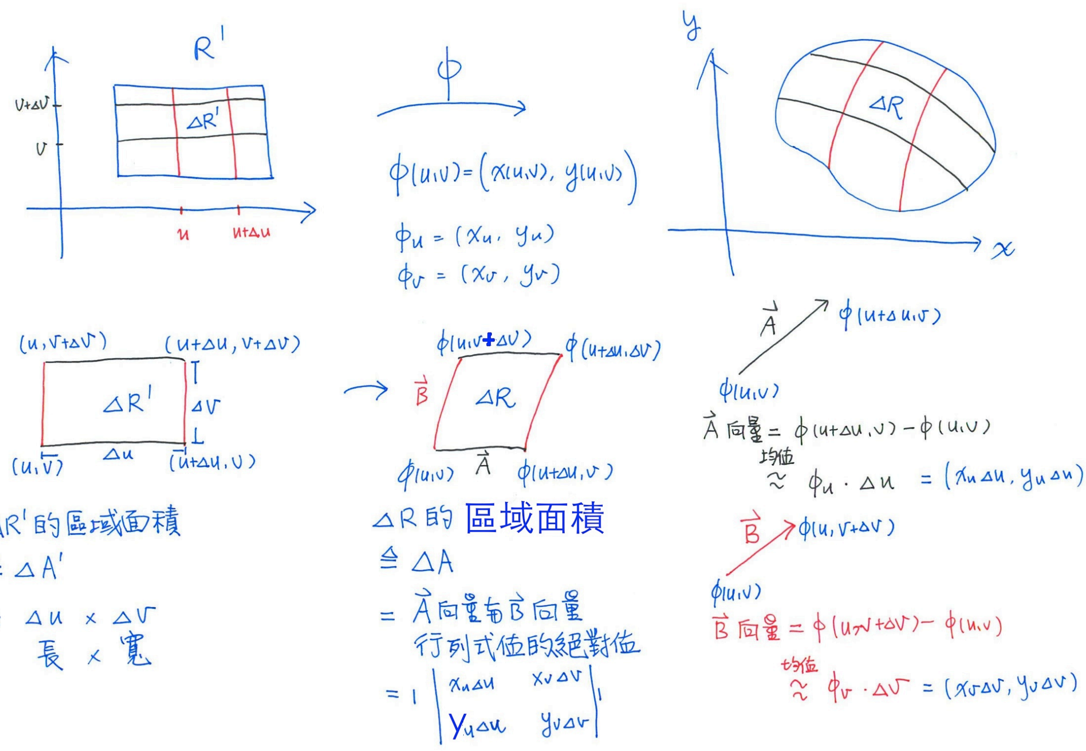
其中$\mathbb{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$，我們引入了重積分的變數變換或是平面座標變換的概念．我們使用映射

$$\phi : R'\to R,\quad (u,v)\mapsto (x(u,v),y(u,v))$$

來表示平面區域R'到R的座標變換．例如，平面極座標與直角座標的變換關係為

$$\phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta),\quad 0\leq r<\infty,\ 0\leq\theta<2\pi.$$

為了方便起見，我們假設R'是(u,v)座標系中的一個矩形區域．我們將R'切割成許多塊長為Δu寬為Δv的小矩形$\Delta R'$．



如果我們將每塊小區域$\Delta R'$的區域面積記為$\Delta A'$則利用矩形面積為長乘寬，我們得到

$$\Delta A'=\Delta u\Delta v.$$

另外一方面，在$u-v$平面上對區域R'的切割在透過座標變換ϕ後，我們得到了$x-y$平面上區域R的切割．在$\Delta u,\Delta v$很小時，我們把切割出來的區域ΔR視為平行四邊形．假設ΔR是由矩形$\Delta R'$得到，並且假設$\Delta R'$的四個頂點座標依逆時針方向為

$$(u,v),\ (u+\Delta u,v),\ (u+\Delta u,v+\Delta v),\ (u,v+\Delta v)$$

則新的區域ΔR的四個頂點座標為

$$\phi(u,v),\ \phi(u+\Delta u,v),\ \phi(u+\Delta u,v+\Delta v),\ \phi(u,v+\Delta v).$$

因為在$\Delta u,\Delta v$很小時，我們將區域ΔR視為平行四邊形．我們令ΔA來表示此區域的面積，則我們可以利用``向量與行列式"來計算ΔA．利用均值定理計算後：

$$\begin{aligned}\phi(u+\Delta u,v)-\phi(u,v)&\approx\phi_u(u,v)\Delta u\\ \phi(u,v+\Delta v)-\phi(u,v)&\approx\phi_v(u,v)\Delta v.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\phi_u(u,v)=(x_u(u,v),y_u(u,v)),\quad \phi_v(u,v)=(x_v(u,v),y_v(u,v)).$$

所以此平行四邊形ΔR的面積ΔA為

$$\begin{aligned}\Delta A&=|\begin{vmatrix}x_u\Delta u & x_v\Delta v\\ y_u\Delta u & y_v\Delta v\end{vmatrix}|\\ &=|\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}|\Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

其中，最外面的$||$表示絕對值．如果我們定義變換ϕ的Jacobian為

$$J(\phi)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix},$$

則ΔA可以與$\Delta A'$的關係可以用下列等式來表示：

$$\Delta A=|J(\phi)|\,\Delta A'=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta A'.$$

換句話說，變數變換的Jacobian的幾何意義就是：它告訴我們區域的微小面積在座標變換後的變化比率：

$$\frac{\Delta A}{\Delta A'}=|J(\phi)|\,.$$

(利用黎曼和得嚴格證明後)我們得到了重積分的變數變換的公式：

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R'}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dA'.$$

所以在極坐標的例子$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$我們得到座標變換的Jacobian為

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

老師講解 1 極坐標變換$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$的變數變換公式為

$$dA=dxdy=rdrd\theta.$$

範例 1.1 計算$\displaystyle\iint_{\mathbb{D}}e^{x^2+y^2}dA.$

解答：考慮極坐標$x = r\cos\theta$與$y = r\sin\theta$，決定區域$R' = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.則積分為

$$\iint_{\mathbb{D}} e^{x^2+y^2} dA = \iint_{R'} e^{r^2} dA' = \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta = \pi(e-1).$$

範例 1.2 假設$a, b > 0$，計算橢圓區域$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\}$面積。

解答：考慮$u = x/a$且$v = y/b$，令$\mathbb{D} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 1\}$，則變換

$$\phi(u,v) = (au, bv)$$

將圓盤$\mathbb{D}$變為橢圓區域E.此變換的Jacobian為：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$

則橢圓區域面積為

$$\iint_E dA = \iint_{\mathbb{D}} |J(\phi)| dA' = \iint_{\mathbb{D}} ab dA' = ab \iint_{\mathbb{D}} dA'.$$

由於$\displaystyle\iint_{\mathbb{D}} dA'$為圓面積$= \pi$，於是$\displaystyle\iint_E dA = \pi ab$.或者，我們在更進一步的使用極坐標來計算圓盤面積：

$$\iint_{\mathbb{D}} dA' = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.$$

範例 1.3 計算$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA$.

解答：利用極坐標$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$ 其中$0 \le r < \infty$且$0 \le \theta < 2\pi$.利用變數變換公式$dA = r dr d\theta$重積分可改寫為

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

計算後我們知道

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

所以$\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi$. 利用Fubini定理，我們還可以得出

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dA &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty} e^{-x^2-y^2} dx \right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) dy \\
&= \left(\int_{-\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right),\ \text{將} \int_{-\infty} e^{-x^2} dx \text{提出後} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2.
\end{aligned}$$

所以我們立即得到$\displaystyle\int_{-\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

老師講解 2 著名的高斯積分為

$$\int_{-\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

2 三重積分的變數變換

與雙重積分類似的情況，在研究三重積分時

$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$

我們可以引入座標變換（變數變換的概念）．令

$$\varphi : D' \to D, \quad (u,v,w) \mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

表示空間中的一個座標變換．我們定義此座標變換的Jacobian為

$$J(\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

則$J(\phi)$告訴我們體積的微小變化滿足以下關係

$$dV = |J(\phi)|\, dV'.$$

此處我們使用dV來表示$x-y-z$座標系中的體積元，dV'表示$u-v-w$座標系中的體積元． 因此，利用黎曼和的嚴謹證明，我們有以下的公式

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_{D'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dV'.$$

有時候為了符號方便，我們會記

$$f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = f(u,v,w), \quad (u,v,w) \in D'.$$

2.1 圓柱座標系

首先我們來考慮三維空間中的圓柱座標系

$$\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

則圓柱座標系的Jacobian為

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

於是我們知道

$$dxdydz = rdrd\theta dz.$$

老師講解 3 圓柱座標系中的變數變換公式為：

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_{D'} f(r,\theta,z)r dV'.$$

2.2 球座標系

球座標為

$$\varphi(r,\phi,\theta) = (\rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta).$$

則球座標變換的Jacobian為

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

因此

$$dxdydz = \rho^2\sin\theta drd\phi d\theta.$$

老師講解 4 圓柱座標系中的變數變換公式為：

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \iiint_{D'} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\theta dV'.$$