1 計算多重積分的訣竅

本文主要以概念性的方式來談積分，不嚴格證明．如有不嚴謹處，請多包含．

我們先從雙重積分開始談．假設R是平面上的有界區域，我們希望計算連續函數$f(x,y)$在R上的積分：

$$\iint_R f(x,y)dA.$$

計算雙重積分最重要的關鍵是想辦法把雙重積分轉成單變數的積分問題來做．假設R是平面的矩形區域

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

通常我們把R記為$[a,b]\times[c,d]$.那麼我們可以把雙重積分寫為

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

能夠這樣拆解的想法就是利用黎曼和的概念．我們把$[a,b]$切割成一些小區間$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，把$[c,d]$切割成$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$.於是平面區域就被切割成一些小矩形

$$R_{ij}=\{(x,y): x_{i-1}\le x\le x_i,\ y_{j-1}\le y\le y_j\}.$$

並記$P=\{(x_i,y_j):0\le i,\le n,\ 0\le j\le m\}$，我們稱$P$為平面區域$[a,b]\times[c,d]$的一個分割．於是重積分就可以寫成以下黎曼和在$\Delta x,\Delta y\to 0$的極限：

$$R(f,P)=\sum_{i,j} f(x_i^*,y_j^*)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中$\Delta x_i=(x_i-x_{i-1})$且$\Delta y_j=(y_j-y_{j-1})$而$\Delta x=\max\{\Delta x_i:1\le i\le n\}$且$\Delta y=\max\{\Delta y_j:1\le j\le m\}$且$(x_i^*,y_j^*)\in R_{ij}$． 這時候我們先對$j$求和，在對$i$,:

$$R(f,P)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m f(x_i^*,y_j^*)\Delta y_j\right)\Delta x_i$$

利用積分的定義：

$$\begin{aligned}\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} R(f,P)\\&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m f(x_i^*,y_j^*)\Delta y_j\right)\Delta x_i\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^m f(x_i^*,y_j^*)\Delta y_j\right)\Delta x_i\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n\left(\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{j=1}^m f(x_i^*,y_j^*)\Delta y_j\right)\Delta x_i.\end{aligned}$$

利用黎曼和的定義，我們知道

$$\lim_{\Delta y\to 0}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*,y_j^*)\Delta y_j=\int_c^d f(x_i^*,y)dy$$

如果我們令$\phi(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$,則

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i^*)\Delta x_i=\int_a^b \phi(x)dx.$$

於是我們得到

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

同理我們可以証明

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

較複雜平面區域怎麼辦？我們必須先決定對何變數積分，把問題簡化成單變數積分的問題．

1.1 先對y積分，再對x積分

假設我們希望先對y變數積分，再對x變數積分，我們必須決定x的範圍，然後固定x時，決定y的上下限．假設$a\le x\le b$且當固定x時，y的上下限為$g_1(x)\le y\le g_2(x)$，則積分為

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

範例 1.1 假設 $D=\{(x,y):0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}$.求積分$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dA$

我們可以把積分寫為

$$\iint_D (x^2+y^2)dA=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dydx.$$

1.2 先對x積分，再對y積分

我們決定y的範圍再決定x的範圍．假設$c\le y\le d$．固定y時，x的上下限為因為y而改變，於是$h_1(y)\le x\le h_2(y)$．因此積分為

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$

範例 1.2 假設$D=\{(x,y):-2\le y\le 4,\ y^2/2-3\le x\le y+1\}$．求積分$\iint_D xydA.$

我們可以把積分改寫為

$$\iint_D xydA=\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1}xydxdy.$$

2 三重積分

利用類似的想法，我們也可以來計算三重積分

$$\iiint_D f(x,y,z)dV.$$

我們可以利用對某個變數先積分後，將三重積分變成二重積分來計算．舉例來說，假設區域D是由

$$D=\{(x,y,z):(x,y)\in R,\ f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)\}$$

所組成．那麼我們可以先對z積分：

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\iint_R\left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dA.$$

如果我們令$\phi(x,y)=\displaystyle\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)}f(x,y,z)dz$則三重積分變為二重積分的問題：

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\iint_R\phi(x,y)dA.$$

接著再利用前面一節提到的將三重積分再次化減為雙重積分．舉例來說：

範例 2.1 若$D=\{(x,y,z):0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2,\ 0\le z\le y\}$，求$\iiint_D f(x,y,z)dV.$

解答：令$R=\{(x,y):0\le x\le 1,0\le y\le x^2\}$則原積分等於

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\iint_R\left(\int_0^y f(x,y,z)dz\right)dA.$$

再利用R我們更可以化為：

$$\iiint_D f(x,y,z)dV=\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x,y,z)dzdydx.$$

我們當然並不一定要先對z積分·我們也可以先對x積分，或先對y積分·這些方式都與前面類似·例如，我們想先對x積分，我們就將區域D寫為

$$D=\{(x,y,z):(y,z)\in R,\ h_1(y,z)\le x\le h_2(y,z)\}$$

此處R為y,z平面上的一個平面區域·於是積分就可以改寫為

$$\iint_D f(x,y,z)=\iint_R\left(\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dA.$$

同理，我們想先對y積分，我們將區域D寫為

$$D=\{(x,y,z):(x,z)\in R,\ g_1(x,z)\le y\le g_2(x,z)\},$$

此處R是$x-z$平面上的區域·於是積分可以改寫為

$$\iint_D f(x,y,z)=\iint_R\left(\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dA.$$

範例 2.2 計算積分$\iiint_D zdV$其中D是由$x=0,y=0,z=0$與$x+y+z=1$的平面劃分出來的區域·

將D寫為

$$D=\{(x,y,z):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\}.$$

於是積分為

$$\iiint_D zdV=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} zdzdydx.$$

範例 2.3 計算$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}dV$,其中D是由$y=x^2+z^2$與$y=4$所畫出來的區域·

將D寫為

$$D=\{(x,y,z):0\le x^2+z^2\le 4,\ x^2+z^2\le y\le 4\}.$$

因此積分可以改寫為

$$\iiint_D\sqrt{x^2+z^2}dV=\iint_{\{x^2+z^2\le 4\}}\left(\int_{x^2+z^2}^4\sqrt{x^2+z^2}\right)dA.$$

3 n重積分

利用類似的想法，我們可以來計算n重積分其中$n \geq 1$:

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \cdots, x_n) dV_n,$$

當$n \geq 3$時，我們就用dV_n來表示n維度區域的體積．我們的做法是，對某個變數先積分，讓原本的n重積分變為$n-1$重積分．例如，我們對x_n變數積分，我們將區域D寫成

$$D = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) : (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in R_{n-1},\ g_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_2(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

其中R_{n-1}為$x_1 - \cdots - x_{n-1}$曲面上的區域．則n重積分可以寫為

$$\int \cdots \int_D f(x_1, \cdots, x_n) dV = \int \cdots \int_{R_{n-1}} \left(\int_{g_1(x_1, \cdots, x_{n-1})}^{g_2(x_1, \cdots, x_{n-1})} f(x_1, \cdots, x_n) dx_n \right) dV_{n-1}$$

範例 3.1 求4維球體體積$B_4 = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$.

解答：令$B_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$．則

$$B_4 = \{(x, y, z, w) : (x, y, z) \in B_3,\ -\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} \leq w \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\}.$$

所以

$$\begin{aligned} V(B_4) &= \iiiint_{B_4} dV_4 \\ &= \iiint_{B_3} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} dw \right) dV_3 \\ &= 2 \iiint_{B_3} \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} dV_3. \end{aligned}$$