Lagrange 插值多項式

§1. 導言

這一次要談的是一類比較特別的多項式，這一類多項式的產生主要來自於以下的問題：任給平面上$n+1$個點，$(b_1,c_1),(b_2,c_2),\ldots,(b_{n+1},c_{n+1})$何時我們能夠找到一個$n$次多項式使得他的圖形通過這$n+1$個點？那即是說，是否存在一個實係數多項式$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$使得$f(b_k)=c_k$？在我們的課程中我們將只討論$n=2$的情形。

§2. 行列式的計算（複習）

我們定義符號

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

稱為三階行列式，其中$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，若令

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

分別稱為a_{11},a_{12},a_{13}的餘因子(Cofactor)，同理可以定義出所有a_{ij}的餘因子A_{ij}。

則行列式的定義可以改寫成$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$。而一般的

n階行列式可以定義成$\det\left(a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$

習慣上來說，若記$\overrightarrow{A_1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix},\overrightarrow{A_2}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix},\overrightarrow{A_3}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$，令$\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})=\det\left(a_{ij}\right)$

則行列式$\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})$擁有以下的性質

(1) $\det(\alpha\overrightarrow{A_1}+\beta\overrightarrow{B_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})=\alpha\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})+\beta\det(\overrightarrow{B_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})$

$\det(\overrightarrow{A_1},\alpha\overrightarrow{A_2}+\beta\overrightarrow{B_2},\overrightarrow{A_3})=\alpha\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})+\beta\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{B_2},\overrightarrow{A_3})$

$$\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\alpha\overrightarrow{A_3}+\beta\overrightarrow{B_3})=\alpha\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})+\beta\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{B_3})$$

（2）$\det(\overrightarrow{A_{\sigma(1)}},\overrightarrow{A_{\sigma(2)}},\overrightarrow{A_{\sigma(3)}})=\mathrm{sgn}(\sigma)\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})$

其中$\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$是$1,2,3$的一個置換（permutation）

$sgn(\sigma)=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$，若兩行改變奇數次則值為−1。偶數次值為 1。

（3）$\det(A^t)=\det(A), A=(a_{ij})\in M_n(\mathbf{R})$

例題 1. 一個重要的例子（凡德摩行列式）：試求出$\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}$的行列式值，$a,b,c$均不相等。

解法一：我們利用行列式的性質直接計算可得

解法二：

我們令$f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & b & b^2\\1 & c & c^2\end{vmatrix}$，則$f(x)$是一個實係數二次多項式。$f(x)$的首項係數是$c-b$。$f(x)=\begin{vmatrix}b & b^2\\c & c^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & b^2\\1 & c^2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}1 & b\\1 & c\end{vmatrix}x^2$

利用行列式的性質我們知道$f(b)=f(c)=0$所以b,c是多項式$f(x)$的兩個相異根。所以$f(x)=(c-b)(x-b)(x-c)$，原式就是求多項式$f(x)$在$x=a$的值，把a代入可得行列式值為$(c-b)(a-b)(a-c)$。

§3. 克拉碼法則

考慮方程組$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_1\end{cases}$，如果$\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})\neq 0$，則此方程組有唯一解

$$x_1=\frac{\det(\overrightarrow{B},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})},x_2=\frac{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{B},\overrightarrow{A_3})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})},x_3=\frac{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{B})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}$$

其中$\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，此時$\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})$稱為方程組的係數行列式。

現在原本的問題：任給平面上三個點$(b_1,c_1),(b_2,c_2),(b_3,c_3)$是否存在一個實係數二次多項式$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$滿足$f(b_k)=c_k$？如果把點代入這個多項式，則我們得到一個聯立方程組：

$$\begin{cases} a_0+a_1b_1+a_2b_1^2=c_1 \\ a_0+a_1b_2+a_2b_2^2=c_2 \\ a_0+a_1b_3+a_2b_3^2=c_3 \end{cases}$$

因此原本的問題便成了解方程組的問題，若這個方程組的係數行列式不為零，則發現此方程組有唯一解。利用克拉碼公式以及凡德摩行列式計算發現：

$$a_0=\frac{\det(\overrightarrow{B},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}=c_1\frac{b_2b_3}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}+c_1\frac{b_1b_3}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}+c_3\frac{b_1b_2}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}$$

$$a_1=\frac{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{B},\overrightarrow{A_3})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}=c_1\frac{-(b_2+b_3)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}+c_1\frac{-(b_1+b_3)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}+c_3\frac{-(b_1+b_2)}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}$$

$$a_2=\frac{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{B})}{\det(\overrightarrow{A_1},\overrightarrow{A_2},\overrightarrow{A_3})}=c_1\frac{1}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}+c_1\frac{1}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}+c_3\frac{1}{(b_3-b_1)(b_3-b_2)}$$

代入原本的多項式可得：

$$f(x)=c_1\frac{(x-b_2)(x-b_3)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)}+c_2\frac{(x-b_1)(x-b_3)}{(b_2-b_1)(b_2-b_3)}+c_3\frac{(x-b_1)(x-b_2)}{(b_2-b_1)(b_3-b_2)}$$

令$f_k(x)=\dfrac{\prod_{j\neq k}(x-c_j)}{\prod_{j\neq k}(c_k-c_j)}$，不難發現$f_k(c_j)=\begin{cases}0若k\neq j\\1若k=j\end{cases}$，因此$f(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kf_k(x)$

我們稱$f_k(x)$為 Lagrange 多項式。

例 2.試構造一個過點$(1,8),(2,5),(3,-4)$的二次多項式，並且求出此時的 Lagrange 多項式。

答案：$f(x)=-3x^2+6x+5$**此時的 Lagrange 多項式為**

$$f_1(x)=\frac{1}{2}(x^2-5x-6),f_2(x)=-1(x^2-4x-3),f_3(x)=\frac{1}{2}(x^2-3x-2)$$

註：事實上，若任意給出$n+1$**個點的情形與**$n=2$**的情形類似。**