

國立成功大學 82 學年微積分實力測驗試題

1993.4.23.

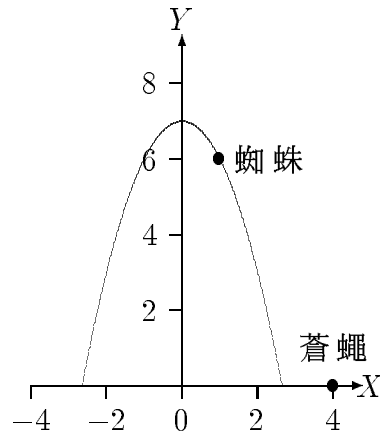
1. (a) 試用 ϵ - δ 方法證明 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$ 存在，並求其值。

(b) 試求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - [x]}{5x + 3}$ ，其中 $[]$ 表最大整數函數。

2. (a) 設函數 $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 。

試討論瑕積分 $\int_{-1}^1 g(x) dx$ 之斂散性。若其為收斂，則求其值。

(b) 設蜘蛛沿曲線 $y = 7 - x^2$ 之最高點向下爬行，碰到 X 軸就向 X 軸正向前進，而蒼蠅停在點 $(4, 0)$ 處不動。當蜘蛛第一次看到蒼蠅時，始前往捕食。試問蜘蛛前往捕食之爬行路程的長為若干？



3. (a) 求下列二導數 $\frac{dy}{dx}$ ：

(1) $y = \int_{\sin x}^1 \frac{x}{1+t^2} dt$; (2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2 \cos 2t, \end{cases}$ 其中 $t \in (0, \pi)$,

(b) 試證明 $\pi^e < e^\pi$ 。(提示：考慮 $\frac{\ln x}{x}$ 之極值)。

4. (a) 試求 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ 。

(b) 試求平面上區域 $R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x}, 1 \leq x \right\}$ 之面積，並求 R 對 X 軸迴轉所得之立體體積。

5. 試討論函數

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{若 } x \neq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

之漸近線、極值、增減性及凹凸性，並繪製其圖形。