

國立成功大學 87 學年微積分實力測驗試題

1999 年 4 月 17 日 上午 9:20~11:00

注意：1. 本試卷共分五大題，務必依序在試卷之五小頁上作答。
2. 禁止使用計算機。

1. 求下列各極限： (15%)

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \sqrt[n]{1 + \frac{k}{n}}$. (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - e^x)$. (c) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_1^{(1+\delta)^2} e^{-t^2} dt$.

2. 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = e^{x-e^x}$,

(a) 討論函數 f 之極值，反曲點、遞增區間、遞減區間、上凹區間、下凹區間及漸近線。 (12%)

(b) 試繪 $y = f(x)$ 之圖形。 (4%)

(c) 判斷瑕積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x} dx$ 之斂散性。 (10%)

3. 求下列各積分： (15%)

(a) $\int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{x} dx$. (b) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} dx$. (c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \cos^2 x}} dx$.

4. (a) 設 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續且在區間 (a, b) 可微。

證明若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A$ ，則 f 在 $x = a$ 可微且 $f'(a) = A$ 。 (8%)

(b) 設 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 之函數， $|f|$ 在 $x = 0$ 可微且 $f(0) = 0$ 。

證明 f 在 $x = 0$ 可微且 $f'(0) = 0$ 。 (8%)

(c) 設 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

證明 f 為可微函數，且 f' 在 $x = 0$ 為連續。 (8%)

5. (a) 求兩圓 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 及 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 重疊部份之面積。 (10%)

(b) 求圓 $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 繞 $x = 1$ 所形成立體之體積。 (10%)