# *91* 年度微積分競試　參考答案

**1.** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

**【解】**

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \lim_{x\to\infty}\exp\left[(2x+1)\ln(\frac{2x-3}{2x+5})\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln(\frac{2x-3}{2x+5})\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\frac{2x-3}{2x+5})}{\frac{1}{2x+1}}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x-3}-\frac{2}{2x+5}}{-\frac{2}{(2x+1)^2}}\right] \\
&= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{-8(2+\frac{1}{x})^2}{(2-\frac{3}{x})(2+\frac{5}{x})}\right] = \exp(-8).
\end{aligned}$$

---

**2.** 試求 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x+2}\,dx$.

**【解】** 令 $u=\cos x$， 則 $-du=\sin x\,dx$，

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \int_1^0\frac{-1}{u^2+3u+2}\,du = -\int_1^0(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+2})\,du \\
&= -\ln\left|\frac{u+1}{u+2}\right|\Big|_1^0 = -\ln\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

---

**3.** 求 $a,b$ 之值， 使得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1}=1$.

**【解】** $1^\circ$

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a+b} &= \lim_{x\to1}\sqrt[3]{ax+b} = \lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1}\cdot(x-1)+2\right] \\
&= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}(x-1)+\lim_{x\to1}2 = 2,
\end{aligned}$$

即 $a+b=8$

$2^\circ$

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{ax+b}-2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{ax+b}-\sqrt[3]{a+b}}{x-1} \\
&= \frac{d}{dx}\sqrt[3]{ax+b}\Big|_{x=1} = \frac{a}{3(a+b)^{2/3}} = \frac{a}{12}, \quad (\text{由 } 1^\circ)
\end{aligned}$$

是以 $a=12$ 代入 $1^\circ$ 得 $b=-4$.

**4.** 討論 $f(x)=x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ 之遞增、遞減及凹凸情形並繪製 $f$ 之圖形.

**【解】** 1° $D_f=(-\infty,\infty)$, 且 $f$ 為連續函數.

2°

$$f'(x)=\frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}},\quad \forall x\notin\{0,6\},$$

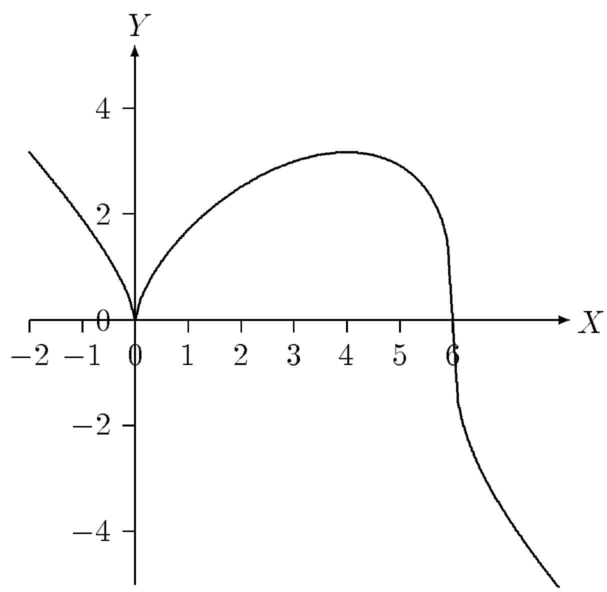
$$f''(x)=\frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}},\quad \forall x\notin\{0,6\}.$$

由於 $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$, $S(f)=\{0,6\}$, 故 $f$ 之臨界點集為 $\{0,4,6\}$.
其次 $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0,6\}$.

3°

| $x$ | | 0 | | 4 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | 0 | | $+$ | | 0 | $-$ |
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | | $-$ | | | $+$ |
| 說　明 | ↘ ⌢ | min | ↗ | max ⌢ | ↘ | 反曲 | ↘ ⌣ |

4° 作圖:




**5.** 設 $f(x)=\begin{cases} x+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$ 試求 $f'(x)$.

【解】若 $x\neq 0$, 則 $f'(x)=1+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$.
若 $x=0$, 則

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x\cos\frac{1}{x})=1\ .\quad{}^{[\star]}$$

[⋆] 因 cos 為有界. 因此

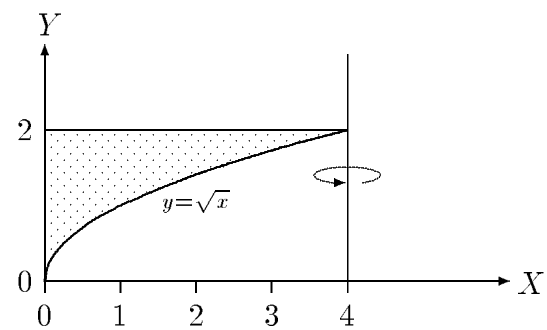
$$f'\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f'(x)=\begin{cases}1+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0,\\ 1, & 若\ x=0,\end{cases}$$

---

**6.** 考慮由曲線 $y=\sqrt{x}$, 直線 $y=2$ 及 $x=0$ 所圍成之區域, 計算此區域對直線 $x=4$ 旋轉所圍之體積.

【解】令 $R(y)=4,\ r(y)=4-y^2$, 則

$$\begin{aligned}体積&=\int_0^2\pi[R(y)^2-r(y)^2]\,dy\\&=\pi\int_0^2[16-(4-y^2)^2]\,dy\\&=\pi\int_0^2(8y^2-y^4)\,dy\\&=\pi\Big[\frac{8}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\Big]\Big|_0^2\\&=\pi\Big[\frac{64}{3}-\frac{32}{5}\Big]=\frac{224}{15}\pi.\end{aligned}$$




區域圖形為

---

**7.** 假設 $a<b$, 證明不等式 $e^a(b-a)<e^b-e^a<e^b(b-a)$ 成立.

【解】由均值定理知, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$e^b-e^a=e^{\xi}(b-a).$$

但 exp 為遞增, 故

$$\begin{aligned}e^a<e^{\xi}<e^b\ &\Rightarrow\ e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b\\&\Rightarrow\ (b-a)e^a<e^b-e^a<(b-a)e^b.\end{aligned}$$

---

**8.** 設 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 為連續, $g(1)=2,\ g(2)=-1,\ \int_1^2 g(t)\,dt=3$ 且 $F(x)=\int_{x^3}^2 g(xt)\,dt$ 對所有 $x\in\mathbb{R}$. 試求 $F'(1)$.

**【解】** 令 $u=xt$, 則 $\frac{1}{x}\,du=dt$,

$$F(x)=\int_{x^3}^2 g(xt)\,dt=\frac{1}{x}\int_{x^4}^{2x} g(u)\,du.$$

利用微積分基本定理,

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_{x^4}^{2x} g(u)\,du+\frac{1}{x}(g(2x)\cdot 2-g(x^4)\cdot 4x^3),$$

故 $F'(1)=-13$.

---

**9.** 設 $f$ 在 $[0,\infty)$ 上可微分, $f(0)=0$ 且 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 對所有 $x>0$.
證明：若 $f'$ 在 $[0,\infty)$ 上為遞增函數, 則 $g$ 在 $(0,\infty)$ 上也為遞增函數.

**【解】** 法一： 由於 $\forall x>0$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2},\quad (\because f(0)=0)\\&=\frac{xf'(x)-\int_0^x f'(t)\,dt}{x^2}=\frac{\int_0^x (f'(x)-f'(t))\,dt}{x^2}\\&>0,\quad (\because f' \text{ 在 } [0,\infty) \text{ 上遞增})\end{aligned}$$

法二： 只需証明 $\forall x\in(0,+\infty)$, $g'(x)>0$, 因為

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\\&=\frac{x(f'(x)-\frac{f(x)}{x})}{x^2}\\&=\frac{x(f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x-0})}{x^2},\quad (\because f(0)=0)\\&=\frac{x(f'(x)-f'(c))}{x^2},\quad (\because \text{均值定理}, \exists c\in(0,x))\\&=\frac{f'(x)-f'(c)}{x}>0,\quad (\because f' \text{ 在 } [0,\infty) \text{ 上為遞增})\end{aligned}$$

---

**10.** 假設 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 為二階可微分之函數且 $|f''(x)|\le K,\ K>0$. 如果 $f(x)$ 有極大值於 $(0,1)$, 試證明 $|f'(0)|+|f'(1)|\le K$.

**【解】** 由於 $|f''(x)| \leq K$，且 $f$ 於區間 $(0,1)$ 上有極大值，因此，$\exists\, x_0 \in (0,1)$ 使得 $f'(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} |f'(0)| + |f'(1)| &= |f'(0) - f'(x_0)| + |f'(1) - f'(x_0)| \\ &= |f''(\xi_1)x_0| + |f''(\xi_2)(1-x_0)|, \quad \text{for some}\, \xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1) \\ &\leq Kx_0 + K(1-x_0) = K. \end{aligned}$$