國立中山大學、國立成功大學合辦 93 學年度基礎學科
微積分競試試題

94年4月30日 (星期六)　上午9:10~10:50

注意:

1. 請在答案卷左上角寫上考生身份資料。
2. 本試卷共分選擇題、非選擇題兩種; 選擇題4題、非選擇題10題。
3. 作答時請標明題號, 並依序作答於試卷之五小頁上。
4. 禁止使用計算器。

I. 多重選擇題 [20%] (每題有一個或一個以上正確的選項, 全對才給分)

1. [5%] 以下哪些等式是正確的?

(A) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, 其中 $x, y > 0$。

(B) $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$, 其中 $a > 0$。

(C) $\int_a^b \cos 2x\, dx = \sin 2b - \sin 2a$。

(D) $\int_0^1 e^{x^2}\, dx = \int_{-1}^0 e^{x^2}\, dx$。

2. [5%] 假設 f 和 g 是兩個定義在實數 $\mathbb{R}$ 上的可微分函數。如果 $a < b$, 則以下哪些陳述是對的?

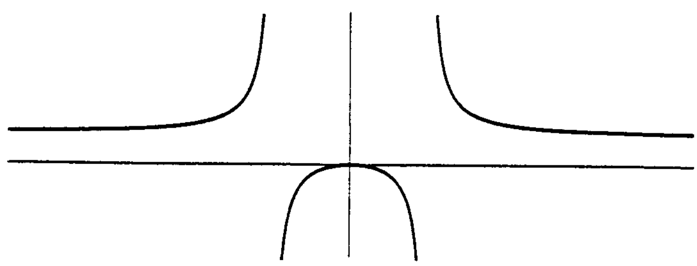
(A) 如果對所有的 $x \in (a,b)$, $f'(x) = g'(x)$ 成立, 則對所有的 $x \in (a,b)$, $f(x) = g(x)$ 成立。

(B) 如果對所有的 $x \in (a,b)$, $\int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt$ 成立, 則對所有的 $x \in (a,b)$, $f(x) = g(x)$ 成立。

(C) 如果對所有的 $x \in (a,b)$, $f(x) = -g(x)$ 成立, 則對所有的 $x \in (a,b)$, $f'(x) = -g'(x)$ 成立。

(D) 如果對所有的 $x \in (a,b)$, $f(x) = 1/g(x)$ 成立, 則對所有的 $x \in (a,b)$, $f'(x) = 1/g'(x)$ 成立。

3. [5%] 假設 $y = f(x)$ 的函數圖形如下:



以下對 $y = f'(x)$ 的函數圖形的描述, 哪些是正確的?

(A) 圖形通過原點。

(B) 直線 $y = 0$ 是圖形的漸近線。

(C) 函數 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 附近是遞增的。

(D) 圖形對稱於 y 軸。

(背面尚有考題)

4. [5%] 假設 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一個連續函數。以下哪些關於 $\int_a^b f\,dx$ 的近似積分的陳述是對的?

(A) 如果函數 f 在區間 (a,b) 是遞增的, 則用梯形法 (trapezoidal rule) 的近似值會比精確值大一些。

(B) 如果函數 f 在區間 (a,b) 是凹向上的 (concave upward), 則用梯形法 (trapezoidal rule) 的近似值會比精確值大一些。

(C) 如果函數 f 在區間 (a,b) 是凹向上的 (concave upward), 則用 Simpson 法的近似值會比精確值大一些。

(D) 如果 f 是一個二次多項式, 則用 Simpson 法會得到精確值。

II. 計算題 [80%] (須有計算過程)

1. [8%] 求函數 $f(x)$ 的微分: $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\ln(3x^4+5)}$。

2. [8%] 若 $f(3) = -4$, $f'(3) = 2$, $f''(3) = 5$,試求 $\left.\dfrac{d^2}{dx^2} f^2(x)\right|_{x=3}$。

3. [8%] 已知$\sqrt[3]{20} \approx 2.7144$, 求$\sqrt[3]{20.003}$的近似值。

4. [8%] 求函數 $f(x) = \int_0^x t(t-1)^2(t+1)^3\,dt$ 的局部極大值與局部極小值。

5. [8%] 求不定積分 $\int \dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$。

6. [8%] 設 a,b,c 爲實數。試證明函數 $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 沒有 (局部) 極值的充分必要條件是 $a^2 \leq 3b$。

7. [8%] 在坐標平面上畫出滿足以下條件的二階可微函數 f 的圖形:
$f''(x) > 0$ 當 $|x| > 2$; $f''(x) < 0$ 當 $|x| < 2$;
$f'(0) = 0$; $f'(x) > 0$ 當 $x < 0$; $f'(x) < 0$ 當 $x > 0$;
$f(0) = 4$; $f(2) = 2$; $f(x) > 0$ 對所有的 x; 且 f 是偶函數 (even function)。

8. [8%] 利用函數 $\dfrac{e^x - 1}{x}$ 的泰勒展開式去求出無窮級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的值。

9. [8%] 求在坐標平面上被曲線: $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = -2$, $x = 1$ 所圍住的區域的面積。

10. [8%] 計算曲線長度:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t\sin t \\ y(t) = \sin t - t\cos t \end{cases}$$

其中 $0 \leq t \leq \pi$。